Seria 9. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

3 czerwca 2014

Zadanie 1. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym i niech F będzie lipschitzowsko ciągła. Wykaż, że istnieje jednoznaczne słabe rozwiązanie $u \in C([0,\infty[, L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}([0,\infty[, H^1_0(\Omega))$ zagadnienia

$$u_t - \Delta u = F(u) \quad \text{w } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Zadanie 2. Niech S będzie dana przez $(S(t)u)(x) = u(x+t)$ dla $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że

a) S jest półgrupą kontrakcji na $L^2(\mathbb{R})$;

b) jeśli A jest tworzącą S, to $H^1(\mathbb{R}) \subsetneq D(A) \subsetneq L^2(\mathbb{R})$;

c) $Au = u'$ dla $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 3. Zdefiniujmy dla $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$(S(t)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u(y)\,\mathrm{d}\,y,$$

gdzie G jest jądrem ciepła

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(\tfrac{-|x|^2}{4t}\right).$$

Wykaż, że

a) S jest półgrupą kontrakcji na $L^2(\mathbb{R}^n)$;

b) S nie jest półgrupą kontrakcji na $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 4. Niech S będzie półgrupą kontrakcji na X z generatorem A. Zdefiniujmy indukcyjnie $D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1})\colon A^{k-1}x \in D(A)\}$ dla $k = 2, 3, \ldots$. Wykaż, że jeśli $x \in D(A^k)$ dla pewnego k, to $S(t)x \in D(A^k)$ dla każdego $t \geq 0$.

Zadanie 5. Zastosuj zadanie 4., by wykazać, że jeśli u jest rozwiazaniem półgrupowym w $L^2(\Omega)$ zagadnienia

$$u_t = \Delta u \quad \text{w }]0, T[\times\Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{na }]0, T[\times\partial\Omega,$$

$$u = u_0 \quad \text{na } \{0\} \times \Omega.$$

z $u_0 \in C_c^\infty(\Omega)$, to $u(t, \cdot\,) \in C^\infty(\Omega)$ dla każdego $0 \leq t < T$.