Seria 8. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

13 maja 2014

Zadanie 1. Wykaż, że $L^\infty([0,1], L^\infty([0,1])) \neq L^\infty([0,1]\times[0,1])$.

Zadanie 2. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem. Załóżmy, że u jest gładkim rozwiązaniem zagadnienia

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{w }]0,\infty[\times\Omega, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{na } [0,\infty[\times\partial\Omega, \qquad u = u_0 \quad \text{na } \{0\}\times\Omega. \tag{2}$$

Wykaż, że

$$\|u(t,\,\cdot\,)\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

gdzie λ_1 jest główną wartością własną operatora $-\Delta$ z zerowym warunkiem brzegowym Dirichleta na Ω.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że Ω jest obszarem ograniczonym oraz $0 < T < \infty$. Niech ponadto $f \in L^2([0,T]\times\Omega)$ oraz $u_0 \in L^2(\Omega)$. Wykaż, że istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T], H^1_0(\Omega))$ zagadnienia

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{w }]0,T[\times\Omega, \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{na } [0,T]\times\partial\Omega, \qquad u = u_0 \quad \text{na } \{0\}\times\Omega. \tag{4}$$

Zadanie 4. Przypuśćmy, że Ω jest obszarem ograniczonym, $0 < T < \infty$ oraz $f \in L^2([0,T]\times\Omega)$. Wykaż, że jeśli $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T], H^1_0(\Omega))$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (3,4) z $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ to $u \in L^\infty([0,T], H^1_0(\Omega)) \cap L^2([0,T], H^2(\Omega))$.

Zadanie 5. Przypuśćmy, że Ω jest obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem, $0 < T < \infty$. Wykaż, że jeśli $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T], H^1_0(\Omega))$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (1,2) z warunkiem początkowym $u_0 \in L^2(\Omega)$, to $u \in C^\infty([\delta,T]\times\overline{\Omega})$ dla pewnego $\delta > 0$.