Seria 7. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

18 marca 2014

Zadanie 1. Załóżmy, że $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i operator $f \mapsto a(f)$ jest słabo ciągowo ciągły na $L^2([0,1])$, tj. $a(f_n) \rightharpoonup a(f)$ w $L^2([0,1])$ jeśli $f_n \rightharpoonup f$ w $L^2([0,1])$. Wykaż, że a jest funkcją afiniczną.

Zadanie 2. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ i załóżmy, że $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ jest lipschitzowsko ciągła ze stałą $L < \lambda_1$, gdzie λ_1 jest główną wartością własną operatora $-\Delta$ z warunkiem brzegowym Dirichleta. Rozważmy układ równań

$$-\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}) \quad \text{w } \Omega,$$

$$\boldsymbol{c} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

z niewiadomą $\boldsymbol{c}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$. Wykaż, że układ ten posiada jednoznaczne słabe rozwiązanie $\boldsymbol{c} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Zadanie 3. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^3$. Rozważmy problem Dirichleta dla stacjonarnego układu równań Naviera-Stokesa

$$\varrho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \mu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \varrho \boldsymbol{f} \quad \text{w } \Omega,$$

$$\mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{w } \Omega,$$

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

gdzie $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, zaś $\varrho, \mu > 0$ są pewnymi stałymi. Oznaczmy

$$H^1_{0,\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^3)\colon \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Wykaż, że istnieje słabe rozwiązanie powyższego układu równań, tj. takie $\boldsymbol{v} \in H^1_{0,\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, że

$$\varrho \int_\Omega (\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} \colon \nabla \boldsymbol{\varphi} = \varrho \int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\phi}$$

dla każdego $H^1_{0,\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.
Wskazówka. Może sie okazać, że warto dokonać następujących obserwacji:

- $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ dla każdego $\boldsymbol{u} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,
- $\|\boldsymbol{u}\|_{L^4} \leq C \|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{4}}_{L^2} \|\nabla \boldsymbol{u}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2}$ dla każdego $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.