Seria 6. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

1. kwietnia 2014

Zadanie 1. Niech Ω będzie jednospójnym obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem i niech $\boldsymbol{f} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Wykaż, że jeśli $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ minimalizuje funkcjonał

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}$$

w klasie

$$\{\boldsymbol{u} \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \colon \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$$

to istnieje $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ takie, że para $(\boldsymbol{u}, p)$ spełnia

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}.$$

Zadanie 2. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem. Rozważmy zagadnienie brzegowe

$$-\Delta u = F'(u) \quad \text{w } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

gdzie $F(z) = |z|^p$ dla pewnego $2 < p < 2^* = \frac{2n}{n-2}$. Wykaż, że istnieje niezerowe słabe rozwiązanie $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tego zagadnienia.