Seria 5. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

1. kwietnia 2014

Zadanie 1. Niech $1 < p < \infty$ i niech Ω będzie obszarem ograniczonym. Załóżmy, że $f \in W^{-1,p'}(\Omega) := (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Wykaż, że istnieje słabe rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{w } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

tj. takie $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, że

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle$$

dla każdej $\varphi \in W_0^{1,p}$.

Zadanie 2. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ z brzegiem klasy C^1. Niech $1 \le p < p^*$, gdzie $p^* = \frac{2d}{d-2}$ jeśli $d \ge 3$, $p^* = \infty$ w przeciwnym razie. Załóżmy, że $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek wzrostu

$$|g(z)| \le C(1 + |z|^{p-1}) \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{R}$$

z pewną stałą $C > 0$. Przypuśćmy ponadto, że $h \in W^{1,2}(\Omega)$. Wykaż, że istnieje słabe rozwiązanie zagadnienia

$$-\Delta u + g(u) = 0 \quad \text{w } \Omega, \tag{1}$$
$$u = h \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{2}$$

tj. taka funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega)$, że równość (1) zachodzi w sensie $W^{-1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega g(u)\varphi = 0 \quad \text{dla każdej } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

a równość (2) w sensie śladów.

Zadanie 3. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$. Rozważmy funkcjonał $I\colon W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$I(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega L(x, \nabla \boldsymbol{v}) \mathrm{d}x,$$

gdzie $L\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką. Przypuśćmy, że istnieje taka funkcja gładka F, że

$$L(x, P) = F(x, P, \det P) \quad \text{dla każdej } (x, P) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Ponadto, załóżmy że odwzorowanie

$$(P, r) \mapsto F(x, P, r)$$

jest wypukłe dla wszystkich $x \in \overline{\Omega}$ (lagranżjan L spełniający taki warunek nazywamy *poliwypukłym*). Wykaż, że

a) lagranżjan $L(P) = \det P$ jest poliwypukły, ale nie jest wypukły;

b) jeśli $\boldsymbol{v} = (v^1, \ldots, v^d) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją gładką, to

$$\det \nabla \boldsymbol{v} = \nabla v^1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{w } \mathbb{R}^d,$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest polem bezdywergentnym (tj. $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = 0$ w $\mathbb{R}^d$);

c) jeśli ciąg $(\boldsymbol{v}_k) \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ zbiega słabo do pewnego $\boldsymbol{v} \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, przy czym $d \leq q < \infty$, to ciąg $(\det \nabla \boldsymbol{v}_k)$ zbiega do $\det \nabla \boldsymbol{v}$ słabo w $L^{\frac{q}{d}}(\Omega)$;

d) jeśli $d \leq q < \infty$, to funkcjonał I jest słabo ciągowo półciągły z dołu na $W^{1,q}(\Omega)$.

Wskazówki. Aby uniknąć nieprzystojnej algebry w punkcie b), możesz wykorzystać podstawowy lemat rachunku wariacyjnego i równość

$$\det \nabla \boldsymbol{w} = \mathrm{d}w^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}w^d$$

zachodzącą dla dowolnego gładkiego pola wektorowego $\boldsymbol{w} = (w^1, \ldots, w^d)$.

Dowód punktu c) rozpocznij od przypadku $d = 2$, a następnie rozumuj indukcyjnie, wykorzystując znajomość struktury komponentów pola $\boldsymbol{\sigma}$. Zwróć uwagę, że jeśli $u_k \rightharpoonup u$ w $W^{1,p}(\Omega)$, to $u_k \to u$ w $L^p(\Omega)$.