Seria 4. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

18 marca 2014

Zadanie 1. (*lemat Mazura*) Wykaż, że domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni Banacha X jest słabo ciągowo domknięty. Możesz założyć, że X jest ośrodkowa (wtedy X jest metryzowalna w słabej topologii i słaba ciągowa domkniętość jest równoważna słabej domkniętości).

Zadanie 2. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem z gładkim brzegiem i niech rozmaitość z brzegiem $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie wykresem funkcji $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Przypuśćmy, że M ma najmniejszą powierzchnię spośród gładkich rozmaitości z tym samym brzegiem. Wykaż, że średnia krzywizna M jest równa stale 0.

Zadanie 3. Niech $1 \le p < \infty$. Oznaczmy

$$\mathcal{W}_p = \{u \in W^{1,p}([0,1]) \colon u(0) = 0, u(1) = 1\};$$

$$I_p \colon \mathcal{W}_p \ni u \mapsto \int_0^1 |u'|^p \in \mathbb{R}.$$

Znajdź zbiór $u \in \mathcal{W}_p$ na których I_p przyjmuje swoje minimum.

Zadanie 4. (*zjawisko Ławrentiewa*) Niech $1 \le p \le \infty$ i niech $\mathcal{W}_p$ będzie jak w poprzednim zadaniu oraz

$$I(u) = \int_0^1 (u(x)^3 - x)^2 |u'(x)|^6 dx.$$

Wykaż, że

$$\inf_{u \in \mathcal{W}_\infty} I(u) > \inf_{u \in \mathcal{W}_1} I(u).$$

Zadanie 5. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w R^n. Rozpatrzmy funkcjonał Dirichleta

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

obcięty do zbioru

$$\mathcal{W}_g = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N) \colon u(x) \in S^{N-1} \text{ dla p. w. } x \in \Omega, u|_{S^{N-1}} = g \in L^2(S^{N-1})\}.$$

Wykaż, że

a) u jest punktem stacjonarnym I na $\mathcal{W}_g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \phi = \int_\Omega |\nabla u|^2 u \cdot \phi$$

dla każdej $\phi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

b) jeśli $\Omega = B^N$, $N \geq 3$ to funkcja $\frac{x}{|x|}$ należy do $\mathcal{W}_{Id}$ i jest punktem stacjonarnym I na tym zbiorze.