Seria 3.' zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

11 marca 2014

Zadanie 1. *(słaba zasada maksimum)* Niech

$$Lu = -A\colon \nabla^2 u + b \cdot \nabla u$$

będzie operatorem eliptycznym o ciągłych współczynnikach w obszarze ograniczonym Ω. Załóżmy, że $A = A(x)$ jest macierzą symetryczną w każdym punkcie $x \in \Omega$. Niech $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Wykaż, że

a) jeśli $Lu \leq 0$ w Ω to $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;

b) jeśli $Lu \geq 0$ w Ω to $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Wskazówka. Dowodząc pierwszy podpunkt załóż najpierw, że $Lu < 0$, a następnie sprowadź ogólną sytuację do tego przypadku.

Zadanie 2. *(lemat Hopfa)* Niech

$$Lu = -A\colon \nabla^2 u + b \cdot \nabla u$$

będzie operatorem eliptycznym o ciągłych współczynnikach w obszarze ograniczonym Ω. Załóżmy, że $A = A(x)$ jest macierzą symetryczną w każdym punkcie $x \in \Omega$. Niech $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Przypuśćmy, że $Lu \leq 0$ w Ω, a ponadto istnieje punkt $x_0 \in \partial\Omega$ taki, że $u(x_0) > u(x)$ dla wszystkich $x \in \Omega$. Przyjmijmy również, że Ω spełnia warunek kuli wewnętrznej w x_0, tj. istnieje kula otwarta $B \subset \Omega$ taka, że $x_0 \in \partial B$. Wykaż, że

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

gdzie ν jest zewnętrznym wektorem normalnym do B w punkcie x_0.

Wskazówka. Możesz rozpatrzeć zmodyfikowaną funkcję u i zastosować słabą zasadę maksimum.

Zadanie 3. *(mocna zasada maksimum)* Niech

$$Lu = -A\colon \nabla^2 u + b \cdot \nabla u$$

będzie operatorem eliptycznym o ciągłych współczynnikach w obszarze ograniczonym Ω. Załóżmy, że $A = A(x)$ jest macierzą symetryczną w każdym punkcie $x \in \Omega$. Niech $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Wykaż, że

a) jeśli $Lu \leq 0$ w Ω i istnieje $x_0 \in \Omega$ taki, że $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, to u jest stała w Ω;

b) jeśli $Lu \geq 0$ w Ω i istnieje $x_0 \in \Omega$ taki, że $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$, to u jest stała w Ω.

Zadanie 4. Niech

$$Lu = -\mathrm{div}(A\nabla u)$$

będzie symetrycznym operatorem eliptycznym o gładkich współczynnikach w obszarze ograniczonym Ω z warunkiem brzegowym $u = 0$. Niech $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ będą jego kolejnymi wartościami własnymi i niech $\omega_1, \omega_2, \dots$ będzie bazą ortonormalną $L^2(\Omega)$ złożoną z odpowiadających im funkcji własnych. Niech B będzie symetryczną formą dwuliniową zadawaną przez L. Wykaż, że

a) $\omega_1, \omega_2, \dots$ jest bazą ortogonalną $H_0^1(\Omega)$ względem iloczynu skalarnego B;

b) $\lambda_1 = \min\{B(u,u)\colon u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$;

c) $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ jest funkcją własną L odpowiadającą wartości własnej λ_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $B(u,u) = \lambda_1$;

d) jeśli u jest funkcją własną odpowiadającą wartości własnej λ_1, to u_+ i u_- również mają tę własność;

e) jeśli Ω jest zbiorem spójnym, to każda funkcja własna L odpowiadająca λ_1 jest ściśle ujemna (dodatnia) w Ω;

f) jeśli Ω jest zbiorem spójnym, to λ_1 jest jednokrotną wartością własną;

g) zachodzi wzór

$$\lambda_k = \max_{S \in \Sigma_{k-1}} \min\{B(u,u)\colon u \in S^\perp, \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\},$$

gdzie Σ_k oznacza rodzinę k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $H_0^1(\Omega)$?

Zadanie 5. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $N_\Omega(\lambda)$ liczbę wartości własnych operatora $-\Delta$ w Ω z warunekim brzegowym $u = 0$ mniejszych od λ. Wykaż, że

a) jeśli Ω jest równoległościanem, to

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{\omega_d}{(2\pi)^d} |\Omega|,$$

gdzie ω_d jest miarą kuli n-wymiarowej;

b) jeśli Ω' jest obszarem zawartym w Ω, to $N_{\Omega'}(\lambda) \leq N_\Omega(\lambda)$ dla każdego $\lambda > 0$.