Przestrzenie i przekształcenia sprzężone

Zadanie 1

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym mającym współrzędne 3,2,-1 w bazie sprzężonej do bazie standardowej.
(a) napisać wzór na f
(b) Znaleźć współrzędne funkcjonału f w bazie sprzężonej do bazy $\{(2,3,1),(1,1,0),(-1,-2,1)\}$

Zadanie 2

Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2 + -2x_3, -2x_2 + x_3)$, zaś $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ niech będzie dane wzorem $g(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$. Niech dalej dalej $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(2,0,1),(-1,-1,-1)\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$.
(a) Znaleźć współrzędne $\varphi^\star(f)$ w bazie $(\mathbb{R}^3)^\star$sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.
(b) Podać wzory na funkcjonały tworzące bazę $\ker\varphi^\star$ oraz $\operatorname{im}\varphi^\star$.

Zadanie 3

Dane są bazy $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(0,1,-1),(-1,2,-1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,-1,1),(0,-1,0)\}$ przestrzeni liniowej $\mathcal{R}^3$.
(a) funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{R}^3)^\star$ ma współrzędne 2,1,1, w bazie $(\mathcal{B})^\star$ sprzężonej do $\mathcal{B}$. Znaleźć wzór na f oraz współrzędne f w bazie $(\mathcal{A})^\star$.
(b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.
Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $g(x_1, x_2, x_3) = rx_1 + x_2 + x_3 \in (\mathbb{R}^3)^\star$ należy do jądra przekształcenia sprzężonego $\varphi^\star$.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$.
(a) Funkcjonał $f \in (\mathbb{R}^3)^\star$ ma w bazie bazie $(\mathcal{A})^\star$ współrzędne 2,5,3. Znaleźć współrzędne f w bazie bazie $(\mathcal{B})^\star$
(b) Niech $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane będzie wzorem $\phi_t((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2, 3x_1 + tx_2)$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\phi_t^\star$ nie jest epimorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć bazę przestrzeni $\operatorname{im}(\phi^\star)$.