Zadanie 3

$W = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : x_{2k} = x_{2k+1} \quad \forall_{k=1,2,\dots}\}$

T: $\phi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty \quad \wedge \quad \ker \phi = W \quad \wedge \quad \operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^\infty$

a) Weźmy

$\phi(x) = y \qquad x \in \mathbb{R}^\infty \wedge y^\infty$

$x = (x_1, x_2, \dots) \qquad y = (y_1, y_2, \dots)$ oraz $\forall_{i=1,2,\dots} \; y_i = x_{2i} - x_{2i-1}$

Z definicji ϕ : $\ker\phi = W$

Należy pokazać, że $\operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^\infty$

Weźmy zatem wektory $v_1 = \varepsilon_2;\ v_2 = \varepsilon_4, \dots$ Zatem $\forall_{i=1,\dots} \; v_i = \varepsilon_{2i}$

gdzie ε_i - to wektor z bazy standardowej

$\forall_i \; \phi(v_i) = \varepsilon_i \implies \operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^\infty$

b) Twierdzenie o izomorfizmie mówi, że jeśli $\varphi : V \to W$ jest ~~p. liniowy~~ przekształceniem liniowym to istnieje izomorfizm $\psi : V/\ker\varphi \to \operatorname{im}\varphi$.

W naszym przypadku $V = \mathbb{R}^\infty$ $\ker\varphi = W$ oraz $\operatorname{im}\varphi = \mathbb{R}^\infty$

Zatem istnieje izomorfizm $\psi : \mathbb{R}^\infty/W \to \mathbb{R}^\infty$

Czyli $\mathbb{R}^\infty/W \simeq \mathbb{R}^\infty$