Zadanie 3

$$\begin{cases} f_1(p) = p(1) + p(-1) \\ f_2(p) = p(1) - p(-1) \\ f_3(p) = p(0) \end{cases} \qquad F = \{f_1, f_2, f_3\}$$

(i) Skorzystamy z twierdzenia

Tw: Mamy $\dim(X^*|\mathbb{K}) = \dim(X|\mathbb{K})$

Ponadto jeśli układ wektorów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest bazą $X|\mathbb{K}$ to układ funkcjonałów $(s_1, \ldots s_n)$ sprzężonych do $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest bazą $X^*|\mathbb{K}$.

Zatem należy ~~udowodnić~~ znaleźć bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}[X]_2$, taką że F jest bazą sprzężoną do bazy $\mathcal{A}$.

(ii)

$$p_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

I
$$\begin{aligned} f_1(p_1) &= 2a_1 + 2c_1 = 1 \\ f_2(p_1) &= 2b_1 = 0 \\ f_3(p_1) &= c_1 = 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ a_1 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad p_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

II
$$\begin{aligned} f_1(p_2) &= 2a_2 + 2c_2 = 0 \\ f_2(p_2) &= 2b_2 = 1 \\ f_3(p_2) &= c_2 = 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} c_2 &= 0 \\ b_2 &= \tfrac{1}{2} \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \qquad p_2(x) = \frac{1}{2}x$$

III
$$\begin{aligned} f_1(p_3) &= 2a_3 + 2c_3 = 0 \\ f_2(p_3) &= 2b_3 = 0 \\ f_3(p_3) &= c_3 = 1 \end{aligned} \implies \begin{aligned} c_3 &= 1 \\ b_3 &= 0 \\ a_3 &= -1 \end{aligned} \qquad p_3(x) = -x^2 + 1.$$