Zadania domowe z GALu I, seria 8.

Zadanie 1. Niech

$$V_1 = \mathrm{lin}((1,0,1,0),(0,1,0,1)),$$
$$V_2 = \{(x,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y+z=0\}$$

będą podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^4$. Niech ϕ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, niech ψ będzie symetrią względem V_2 wzdłuż V_1.

i) Znajdź bazę $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taką, że $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$, $\alpha_3, \alpha_4 \in V_2$.

ii) Znajdź $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $M(\phi \circ (\psi^{-1}))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

iii) Znajdź wzór na $\psi \circ \phi$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie następującą bazą $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1 = (1,2,4), \quad \alpha_2 = (1,3,4), \quad \alpha_3 = (2,5,9).$$

Podaj wzory na funkcjonały tworzące bazę $(\mathbb{R}^3)^*$ sprzężoną do $\mathcal{A}$.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ będzie układem funkcjonałów na przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ wielomianów stopnia co najwyżej 2 danych wzorami:

$$f_1(p) = p(1) + p(-1), \quad f_2(p) = p(1) - p(-1), \quad f_3(p) = p(0).$$

i) Wykaż, że $\mathcal{F}$ jest bazą $(\mathbb{R}[x]_2)^*$.

ii) Znajdź bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ taką, że $\mathcal{F}$ jest bazą sprzężoną do bazy $\mathcal{A}$.

Zadanie 4. Niech $\phi \colon V \to W$ będzie odwracalnym przekształceniem liniowym. Sprawdź, że $(\phi^{-1})^*$ jest przekształceniem odwrotnym do ϕ^*, tj.

$$(\phi^{-1})^* \circ \phi^* = \mathrm{id}, \quad \phi^* \circ (\phi^{-1})^* = \mathrm{id}.$$

Innymi słowy, jeśli ϕ jest izomorfizmem, to ϕ^* też i $(\phi^*)^{-1} = (\phi^{-1})^*$.

Zadanie 5. Zadając wartości na odpowiednio wybranej bazie $\mathbb{R}^\infty$, podaj przykład funkcjonału $f \in (\mathbb{R}^\infty)^*$ takiego, że f nie wyraża się wzorem

$$f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

dla żadnego $(a_n) \in \mathbb{R}_c^\infty$.
Wskazówka: Można (ale nie trzeba) skorzystać z zadania 5. z serii 6.