Zadanie 5

$X = \{ \phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) / \phi_{|W}$ jest jednokładnością $\}$

$W = \text{lin}((1,0,0), (0,1,0))$

(i) 1) $\forall b \in \mathbb{R} \quad \forall \phi \in X: \quad b \cdot \phi \in X$ gdyż

$\forall v \in W \quad b\phi_{|W} = b\phi(v) = b\,av = (ba) \cdot v \Rightarrow a\phi_{|W}$ – jest jednokładnością

2) $\phi, \psi \in X \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$b_1 \phi + b_2 \psi \in X$ gdyż

$\forall v \in W \quad b_1 \phi_{|W} + b_2 \psi_{|W} = b_1 \phi(v) + b_2 \psi(v) = b_1 a_1 v + b_2 a_2 v = (b_1 a_1 + b_2 a_2) v$

– $(b_1 \phi + b_2 \psi)_{|W}$ jest jednokładnością

(ii) $\cancel{\varphi((1,0,0))}$

$\varphi \in X$

$\varphi((1,0,0)) = a(1,0,0)$

$\varphi((0,1,0)) = a(0,1,0)$ bo $\varphi_{|W}$ – jednokładność

$\varphi((0,0,1)) = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

Zatem $M(\varphi)^{st}_{st} = \begin{bmatrix} a & 0 & x \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1} + x\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_2} + y\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_3} + z\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_4}$

Zatem $X = \text{lin}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$

Stąd $\dim X = 4$