Zadanie 3

$\psi : V \to V$ izomorfizm

$\phi : V \to W$ przekształcenie liniowe

(i)

ψ - izomorfizm $\Rightarrow$ istnieje ψ^{-1} - odwrotność ψ (*)

$\psi \circ \psi^{-1} = id$

1) Zatem istnieje $\xi = \phi \circ \psi^{-1}$

Sprawdzenie $\xi \circ \psi = \phi \circ \psi^{-1} \circ \psi = \phi$

2) Jednoznaczność:

Załóżmy nie wprost że istnieją co najmniej dwa różne przekształcenia liniowe ξ_1 ξ_2 spełniające tezę

Zatem
$$\begin{aligned} \phi &= \xi_1 \circ \psi \\ \phi &= \xi_2 \circ \psi \end{aligned} \Rightarrow \xi_1 \circ \psi = \xi_2 \circ \psi$$

$$\xi_1 \circ \psi \circ \psi^{-1} \overset{(*)}{=} \xi_2 \circ \psi \circ \psi^{-1}$$

$$\xi_1 = \xi_2 \quad ⚡ \text{ sprzeczność}$$

Zatem istnieje tylko jedno przekształcenie ξ spełniające tezę.

(ii).

$$M(\xi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \overset{(*)}{=} M(\phi \circ \psi^{-1})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} M(\psi^{-1})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \left(M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczam $\left(M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -w_2 \\ \\ -w_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ +w_3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ :2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{matrix} +w_3 \\ -w_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$