Zadanie 2

$\phi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\phi(X) = AX \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}$

$A\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A\varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$

$A\varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A\varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$

$A\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{21}$

$A\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{22}$

$A\varepsilon_{21} = 2\varepsilon_{11} + t\varepsilon_{21}$

$A\varepsilon_{22} = 2\varepsilon_{12} + t\varepsilon_{22}$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{bmatrix}$$

ϕ jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$ $\ker\phi = \emptyset \Leftrightarrow \dim \operatorname{im}\phi = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :2 \\ :2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & t/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -w_1 \\ -w_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{t-4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t-4}{2} \end{bmatrix}$$

$\dim \operatorname{im}\phi = 4 \Leftrightarrow t \neq 4$