Zadanie 1

V - przestrzeń liniowa V_1, V_2 podprzestrzenie liniowe $V_1, V_2 \subset V$

$\phi : V_1 \to V_2$

(i) $\dim V < +\infty$

~~[redacted]~~

ϕ - izomorfizm $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

$V_1, V_2 \subset V$ i $\dim V < +\infty \Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = k < +\infty$

Niech $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ - baza V_1

Wtedy $\{\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_k)\}$ - baza V_2

Z tw Steinitza dla V_1 istnieją $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$ że $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ - baza V

oraz dla V_2 istnieją $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ takie że $\{\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_k), \beta_{k+1}, \dots, \beta_n\}$ - baza V

Zdefiniujmy $\psi(\alpha_i) = \begin{cases} \phi(\alpha_i) & \text{dla } i \in \{1, \dots, k\} \\ \beta_i & \text{dla } i \in \{k+1, \dots, n\} \end{cases}$

~~Fakt~~ ψ - liniowe, przeprowadza bazę na bazę

ψ - jest izomorfizmem

$\psi|_{V_1} = \phi$

~~Dowód~~