Rozwiązanie zadania 4. z serii 6.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ w którym $1+1 \neq 0$. Niech $\phi\colon V \to V$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$. Wykaż, że istnieją takie podprzestrzenie V_1, V_2 w V, że ϕ jest symetrią względem V_1 wzdłuż V_2.
Rozwiązanie. Niech

$$V_1 = \{v \in V : \phi(v) = v\},$$
$$V_2 = \{v \in V : \phi(v) = -v\}.$$

Pokażę najpierw, że $V_1 \oplus V_2 = V$. Niech v będzie dowolnym wektorem z z V. Wówczas $v = v_1 + v_2$, gdzie

$$v_1 = \frac{v + \phi(v)}{2}, \quad v_2 = \frac{v - \phi(v)}{2}$$

(ta definicja jest poprawna ponieważ $2 = 1+1 \neq 0$). Dla tak zdefiniowanych v_1 i v_2 z założeń o ϕ wynika, że

$$\phi(v_1) = \phi\left(\frac{v + \phi(v)}{2}\right) = \frac{\phi(v) + \phi \circ \phi(v)}{2} = \frac{\phi(v) + v}{2} = v_1$$

$$\phi(v_2) = \phi\left(\frac{v - \phi(v)}{2}\right) = \frac{\phi(v) - \phi \circ \phi(v)}{2} = \frac{\phi(v) - v}{2} = -v_2$$

zatem $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Z dowolności v, $V = V_1 + V_2$. Niech następnie $v \in V_1 \cap V_2$. Wówczas $v = \phi(v) = -v$ i w konsekwencji $2v = 0$. Ponieważ $2 \neq 0$ w $\mathbb{K}$, wynika stąd, że $v = 0$, zatem $V_1 \oplus V_2 = V$. Z definicji V_1 i V_2 wynika teraz, że ϕ jest symetrią względem V_1 wzdłuż V_2.