

Zadanie 3

$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\ker \phi : \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -5w_2 \\ -7w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -9 & -6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -18 & -12 & -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 6 & 13 \\ 0 & 9 & 6 & 13 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 4v = 0 \\ 9y + 6z + 13v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{9}z - \frac{13}{9}v \\ x = -2z - 4v + \frac{6}{9}z + \frac{13}{3}v \end{cases}$$

$$\text{Zatem } \ker \phi = \text{lin} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim(\ker \phi) = 2$

$$\text{im } \phi : \text{lin}(\phi((1,0,0,0)), \phi((0,1,0,0)), \phi((0,0,1,0)), \phi((0,0,0,1))) =$$

$$= \text{lin}((5, 1, 7), (6, 3, 3), (4, 2, 2), (7, 4, 2))$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_3 \\ -w_1 \\ -w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -w_4 \\ -w_4 \\ -4w_4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Zatem } \text{im } \phi = \text{lin}((1, 1, -1), (0, 1, -3))$$

$\dim(\text{im } \phi) = 2$