Zadanie 1

i) $\varphi((x,y,z)) = [a_1x + b_1y + c_1z \ ; \ a_2x + b_2y + c_2z \ ; \ \cancel{a_3x + b_3y + c_3z}]$

$\varphi((0,1,5)) = (-9,4)$

$\varphi((0,0,1)) = (-2,1)$

$\varphi((1,2,3)) = (-3,3)$

Z liniowości przekształcenia otrzymujemy

$\varphi((0,1,5)) - 5\varphi((0,0,1)) = (-9,4) - 5(-2,1) = (1,-1) = \varphi((0,1,0))$

$\varphi((1,2,3)) - 2\varphi((0,1,0)) - 3\varphi((0,0,1)) = \varphi((1,0,0)) = (-3,3) - 2(1,-1) - 3(-2,1) =$

$= (1,2)$

Zatem

$\varphi((x,y,z)) = (x+y-2z, \ 2x-y+z)$

ii) $\psi \circ \varphi((x,y,z)) = \psi((x+y-2z, \ 2x-y+z)) \overset{?}{=} (y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad \psi((x_1, x_2)) = (a_1x_1 + b_1x_2, \ a_2x_1 + b_2x_2)$

Zatem

$$\begin{cases} a_1(x+y-2z) + b_1(2x-y+z) = y \\ a_2(x+y-2z) + b_2(2x-y+z) = z \end{cases} \quad \forall x,y,z$$

Otrzymujemy następnie $\forall x,y,z$

$$\begin{cases} a_1x + 2b_1x = 0x \\ a_1y - b_1y = 1\cdot y \\ -2a_1z + b_1z = 0\cdot z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2b_1 \\ 2b_1 - b_1 = b_1 = 1 \\ -4+1 = -3 \neq 0 \end{cases}$$ ↯ sprzeczność

Zatem nie istnieje takie przekształcenie liniowe ψ