Zadania domowe z GALu I, seria 6.

Zadanie 1. Niech $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkami $\phi((0,1,5)) = (-9,4)$, $\phi((0,0,1)) = (-2,1)$, $\phi((1,2,3)) = (-3,3)$.

i) Podaj wzór na ϕ.

ii) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że
$$\psi \circ \phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_2,x_3) \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3?$$
Jeśli tak, wskaż przykład takiego ψ (podaj wzór).

Zadanie 2. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje przekształcenie liniowe $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takie, że
$$\phi(\operatorname{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1))) = \operatorname{lin}((1,1,1,1)),$$
$$\phi(\operatorname{lin}((0,0,2,1),(0,1,2,t))) = \operatorname{lin}((2,2,0,-1)),$$
$$\operatorname{im}\phi = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_2\}?$$
Dla każdego takiego t wskaż przykład ϕ spełniającego powyższe warunki poprzez podanie jego wartości na wybranej przez siebie bazie $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 3. Znajdź bazy i wymiary obrazu i jądra przekształcenia $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem
$$\phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (5x_1+6x_2+4x_3+7x_4, x_1+3x_2+2x_3+4x_4, 7x_1+3x_2+2x_3+2x_4).$$

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ w którym $1+1 \neq 0$. Niech $\phi\colon V \to V$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$. Wykaż, że istnieją takie podprzestrzenie V_1, V_2 w V, że ϕ jest symetrią względem V_1 wzdłuż V_2.

Zadanie 5. Sprawdź, że V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni ciągów o wyrazach rzeczywistych $\mathbb{R}^\infty$ i rozstrzygnij, czy $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ jest przekształceniem liniowym

i) $V = c = \{$ciągi zbieżne (do pewnej skończonej granicy)$\}$, $\phi((x_n)) = \lim x_n$,

ii) $V = \ell^\infty = \{$ciągi ograniczone (z góry i z dołu)$\}$, $\phi((x_n)) = \limsup x_n$,

iii) $V = \ell^1 = \{(x_n)\colon \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty x_n$.