Zadanie 4

i)

Nie wprost:

Załóżmy że $W_1 \not\subset W_2 \wedge W_2 \not\subset W_1$

Wtedy istnieje $w_1 \in W_1$ taki że $w_1 \in W_1 \setminus W_2$

Analogicznie $\exists w_2 \in W_2 : w_2 \in W_2 \setminus W_1$

$w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ - gdyż jest to podprzestrzeń liniowa

Zatem : $w_1 + w_2 \in W_1 \vee w_1 + w_2 \in W_2$

Bez straty ogólności załóżmy że $w_1 + w_2 \in W_1$

Ponieważ W_1 - przestrzeń liniowa $\wedge$ $w_1 \in W_1 \Rightarrow -w_1 \in W_1$

Analogicznie $(w_1 + w_2) + (-w_1) = w_2 \in W_1$ ↯ sprzeczność

Zatem $W_1 \subset W_2$ lub $W_2 \subset W_1$

ii) Pokażę przykład spełniający założenie ii

$K = \mathbb{Z}_2$

$V = \mathbb{Z}_2^2 = \{ a(1,0) + b(0,1) \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \} = \{(1,1), (0,0), (0,1), (1,0)\}$

$W_1 = \mathrm{lin}((1,0))$

$W_2 = \mathrm{lin}((0,1))$

$W_3 = \mathrm{lin}((1,1))$

$$W_1 \cup W_2 \cup W_3 = \mathrm{lin}((1,0)) \cup \mathrm{lin}((0,1)) \cup \mathrm{lin}((1,1)) =$$
$$= \{(1,0), (0,0)\} \cup \{(0,1), (0,0)\} \cup \{(1,1), (0,0)\} =$$
$$= \mathbb{Z}_2^2$$