

Zadanie 2

i)

$$V_1: \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{+3w_1 \\ +5w_1}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$a(1, -1, -1, -1) + b(0, 1, -3, -2) = (a, a+b, -a+3b, -a-2b)$$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a + b \\ x_3 = -a + 3b \\ x_4 = -a - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ b = x_2 + a = x_2 + x_1 \\ x_3 = -x_1 + 3(x_1 + x_2) \\ x_4 = -x_1 - 2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Ostateczny

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3(x_1 + x_2) \\ x_4 = -x_1 - 2(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

ii)

$$V_2: \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & 1 \\ 2 & 2t & t & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2w_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 + V_2: \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-w_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & t+1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{+w_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & t+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$ $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$