Zadanie 1.

$V_1 = \text{lin}\left((1,1,0,1),(1,0,1,t),(1,2,2,1)\right)$

$V_2 = \text{lin}\left((0,1,2,0),(1,0,t,1)\right)$

- Wyliczam wymiar V_1 i V_2

$$V_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & t-1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +w_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & t-1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim V_1 = 3$

$$V_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ V_2 - jest schodkowa zatem $\dim V_2 = 2$

i) $V_1 + V_2$: $\text{lin}\left((1,1,0,1),(1,0,1,t),(1,2,2,1),(0,1,2,0),(1,0,t,1)\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ \\ -w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & t-1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & t & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-t \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_3 \\ \\ -w_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1-t \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -t-2 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $t = -2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim(V_1+V_2) = 3$$

dla $t \neq -2$ (dzielimy $w_4 / -t-2$)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1-t \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +3w_4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $t = 1$ $\dim(V_1+V_2) = 3$

wpp $\dim(V_1+V_2) = 4$

Korzystając ze wzoru:

(*) $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ dla $t \in \{1, -2\}$