Zadanie 5

$F = \{ f_c : c \in \mathbb{R} \} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f_c(x) = |x - c|$

Zgodnie z definicją

Układ $U = \{\alpha_t\}_{t \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy liniowo niezależnym jeśli każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny

Zatem należy pokazać że

~~$\forall k$ i danych f~~

$\forall_k$ liniowo niezal jest układ $f_{c_1}, f_{c_2}, \dots, f_{c_k} \in F$ gdzie $\forall_{i,j}\ i \neq j\ c_i \neq c_j$

Bez straty ogólności możemy przyjąć $c_1 < c_2 < \dots < c_n$

Zatem $\forall x \in \mathbb{R}: a_1 |x - c_1| + a_2 |x - c_2| + \dots + a_k |x - c_k| = 0$

1) W szczególności dla $x_1, x_2 \in (\cancel{-\infty}\, c_1, c_2)$ $x_1 \neq x_2$ $x_1 < x_2$ otrzymujemy równanie

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{k} a_i c_i - a_1 c_1 - \sum_{i=2}^{k} a_i x_1 + x_1 a_1 = 0 \\ \sum_{i=2}^{k} a_i c_i - a_1 c_1 - \sum_{i=2}^{k} a_i x_2 + x_2 a_1 = 0 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymuję

$$0 = \sum_{i=2}^{k} a_i x_2 - \sum_{i=2}^{k} a_i x_1 + x_1 a_1 - x_2 a_1 = (x_2 - x_1) \sum_{i=2}^{k} a_i - (x_2 - x_1) a_1$$

$$0 = (x_2 - x_1) \left(\sum_{i=2}^{k} a_i - a_1 \right)$$

$x_2 \neq x_1$ zatem

$$\sum_{i=2}^{k} a_i = a_1 \qquad (*)$$

2) Weźmy teraz $x = y_1, y_2 \in (-\infty, c_1)$ $y_1 \neq y_2$ $y_1 < y_2$ otrzymujemy

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i c_i - \sum_{i=1}^{k} a_i y_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} a_i c_i - \sum_{i=1}^{k} a_i y_2 = 0 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymuję:

$$(y_2 - y_1) \sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \qquad (**)$$