Zadanie 3

V - przestrzeń liniowa : $\dim V \geqslant n$

$v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$ - układ zależny.

Niech $w_1, w_2, \dots, w_{\dim V}$ - baza V

Niech $v_i = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots n\}$ gdyż $\dim V \geqslant n$

$v_{n+1} = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ - układ niezależny, gdyż są to wektory należące do bazy.

Weźmy zatem dowolny inny układ n-elementowy zawierający v_{n+1}

Pokażę że jest to układ niezależny

$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n + a_{n+1} v_{n+1} =$

$= a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n + a_{n+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}) =$

$= (a_1 + a_{n+1}) v_1 + \dots + (a_{i-1} + a_{n+1}) v_{i-1} + a_{n+1} v_i + (a_{n+1} + a_{i+1}) v_{i+1} + \dots + (a_n + a_{n+1}) v_n$

Ale to jest układ niezależny zatem $(a_j + a_{n+1}) = 0$ dla $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots n\}$

oraz $a_{n+1} = 0$

Zatem $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}$ $a_j = 0$

Czyli układ jest niezależny CKD.