Zadanie 1

i) Rozwiązanie układu U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wtedy i tylko wtedy gdy układ jest liniowy i jednorodny.

~~Liniowość~~

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2t = a^2 + a \\ 2x + 7y + (1-a^2)z^6 - 2t = 0 \\ x + 4y + 2z - 5t = -a(a+1) \end{cases}$$

1) Liniowość:

Układ U jest liniowy $\Leftrightarrow$ $1-a^2=0$

Zatem $a^2=1$

$a=-1 \vee a=1$

2) Jednorodność

Układ U jest jednorodny $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^2+a=0 \\ -a(a+1)=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a(a+1)=0 \\ -a(a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1 \vee a=0$$

Z 1) i 2) otrzymujemy że $\underline{a=-1}$.

ii) Dla $a=-1$ otrzymujemy układ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2w_1 \\ -w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3w_2 \\ \\ -w_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -14 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} +16w_3 \\ -6w_3 \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - 14z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14z \\ y = -4z \\ t = 0 \end{cases}$$

Zatem bazą tej przestrzeni jest $\mathrm{lin}((14, -4, 1, 0))$