Zadanie 5.

i) niech $W[x] \subset \mathbb{R}[x] \wedge \forall_{w_1 \in W[x]}$ to $w_1(a) = 0$

wtedy $w(x) = (x-a)P(x)$ $\quad P(x) \in \mathbb{R}(x)$

Weźmy $w_1, w_2 \in W[x]$. Wtedy $w_1(x) = (x-a)P(x)$

$w_2(x) = (x-a)Q(x)$

Należy sprawdzić zamkniętość $W[x]$ na dodawanie wektorów i mnożenie przez skalar

1) $w_1(x) + w_2(x) = (x-a)P(x) + (x-a)Q(x) = (x-a)(P(x) + Q(x))$

$w_3 \in W[x]$

2) $w_3(x) = b\, w_1(x) = b \cdot (x-a)P(x) = (x-a)(b \cdot P(x))$

$w_3 \in W[x]$ $\quad b \in \mathbb{R}$

Zatem $W[x]$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}[x]$

ii) $W[x] \subset \mathbb{R}[x]$

$\forall w \in W[x]: \ st(w) \leq n$

Weźmy $w_1, w_2 \in W[x]$

1) $w_1(x) + w_2(x) = w_3(x)$ $\quad st(w_3(x)) \leq \max\{st(w_1(x)), st(w_2(x))\}$

$\leq n$ $\quad$ zatem $w_3 \in W[x]$

2) $b \in \mathbb{R}$

$w_3(x) = b \cdot w_1(x)$ $\quad st(w_3) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } b = 0 \\ st(w_1) & \text{gdy } b \neq 0 \end{cases}$ $\quad$ zatem $st(w_3) \leq n$

Ostatecznie $W[x]$ nie jest podprzestrzenią liniową