Zadanie 3

1pkt

V - przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_2$, bo:

- zdefiniowane dodawanie wektorów
- zdefiniowane mnożenie wektora przez skalar (skalarami są 0 i 1, bo nad $\mathbb{Z}_2$)
- istnienie wektora zerowego
- spełnienie aksjomatów przestrzeni liniowej:

→ $(A+B)+C = (A\cup B)\setminus(A\cap B) + C = [(A\cup B)\setminus(A\cap B)\cup C]\setminus[(A\cup B)\setminus(A\cap B)\cap C] =$

$= [[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\setminus C]\cup[C\setminus[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]] =$

$= [(A\cup B)\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]]\cup[C\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]] =$

$= (A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)] =$

$= [(B\cup C)\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]]\cup[A\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]] =$

$= [((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\setminus A]\cup[A\setminus((B\setminus C)\cup(C\setminus B))] =$

$= [[(B\cup C)\setminus(B\cap C)]\cup A]\setminus[[(B\cup C)\setminus(B\cap C)]\cap A] = (B\cup C)\setminus(B\cap C)+A =$

$= A+(B+C)$ łączność dodawania wektorów

→ $A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B) \Rightarrow A\cup B = B\cup A$, $A\cap B = B\cap A$ z własności sumy i przecięcia zbiorów

$A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(B\cup A)\setminus(B\cap A)=B+A$ przemienność dodawania wektorów

→ $0=A\setminus A$

$A+0=(A\cup 0)\setminus(A\cap 0)=(A\cup(A\setminus A))\setminus(A\cap(A\setminus A))=A\setminus\emptyset=A$ element ~~neut~~ neutralny dodawania

→ $\forall_{A\in V}\exists_{S\in V}\ A+S=0$ jeśli $A=S$

$A+S=(A\cup S)\setminus(A\cap S)=A\setminus A=\emptyset=0$ istnienie wektora przeciwnego

→ $0\cdot(A+B)=0\cdot A+0\cdot B=0$

$1\cdot(A+B)=1\cdot A+1\cdot B=A+B$ rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów

→ $a=0$

$b=1$

$(0+0)\cdot A=0\cdot A+0\cdot A=0$ rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów

$(0+1)\cdot A = 0\cdot A+1\cdot A=A$

$(1+1)\cdot A=1\cdot A+1\cdot A=A+A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=A\setminus A=0$

→ $(1\cdot 0)A=1\cdot(0\cdot A)=0\cdot(1\cdot A)=0$

$(0\cdot 0)A=0\cdot(0\cdot A)=0$ łączność mnożenia przez skalary

$(1\cdot 1)A=1\cdot(1\cdot A)=1\cdot A=A$

→ $1\cdot A=A$ zdefiniowane w zadaniu

istnienie elementu neutralnego w mnożeniu

Zad 4

1pkt

$a,b\in K$, $v,w\in V$

$av+bw=aw+bv \iff (a=b)\vee(v=w)$

$\Leftarrow$
- $a=b$

  $av+bw=av+aw=a(v+w)=b(v+w)=bv+bw=aw+bv$
- $v=w$

  $av+bw=av+bv=(a+b)v=(a+b)w=aw+bw=aw+bv$

$\Rightarrow$ $av+bw=aw+bv$

$av-bv=aw-bw$

$v(a-b)=w(a-b)$

$(a-b)(v-w)=0$

czyli $a-b=0 \vee v-w=0$

$a=b \vee v=w$