Zadanie 2 CD

ii) $D=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z^3 \le \sqrt{3}\operatorname{Re} z^3\}$ $\quad f(z)=(1-i)z \quad g(z)=\frac{1}{z}$

$z=|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

a) Najtrudniejszą częścią tego zadania było wyznaczenie zbioru D. Często występujący błąd to niezauważenie że $\operatorname{Re} z^3$ może być równe 0 lub mniejsze.

Nie jest wtedy prawdą że

$$\sin 3\varphi \le \sqrt{3}\cos 3\varphi \not\Rightarrow \frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} \le \sqrt{3}$$

Przy takim błędzie stawiałem od razu 0 pkt za rozwiązanie. Dzielenie przez 0 bądź nie rozpatrzenie zmiany znaku nierówności to zbyt poważne błędy żeby je ignorować tym bardziej że już raz zwracałem na to uwagę w poprzednich seriach.

$z=|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^3=|z^3|(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

$|z^3|\cos 3\varphi \le \sqrt{3}\sin 3\varphi \qquad 1^\circ\ |z|=0 \iff z=0$

$2^\circ\ |z|\neq 0$

Otrzymujemy $\cos 3\varphi \le \sqrt{3}\sin 3\varphi$

$$0 \le \sqrt{3}\sin 3\varphi - \cos 3\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 3\varphi - \cos\frac{\pi}{6}\cos 3\varphi\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 3\varphi + \cos\frac{\pi}{6}\cos 3\varphi\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Zatem $0 \geq \cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \le 3\varphi + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2k\pi - \frac{2\pi}{3} \le 3\varphi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \le \varphi \le \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3}$$