

### Zadania domowe z GALu I, seria 3.

**Zadanie 1.** Rozłóż na czynniki stopnia 1 nad  $\mathbb{C}$  oraz na czynniki stopnia  $\leq 2$  nad  $\mathbb{R}$  wielomian

i)  $x^7 - x$ ,

ii)  $x^4 - 6x^2 + 13$ .

**Zadanie 2.** Naskicuj podzbiory  $D$ ,  $f(D)$ ,  $g^{-1}(D)$  płaszczyzny zespolonej, gdzie

i)  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}\}$ ,  $f(z) = iz^3 + 2i$ ,  $g(z) = (z + i)^2$ ,

ii)  $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z^3 \leq \sqrt{3} \text{Re} z^3\}$ ,  $f(z) = (1 - i)z$ ,  $g(z) = \frac{1}{z}$ .

**Zadanie 3.** Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem i niech  $V = 2^X$ . Dla  $A, B \in V$  niech

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$0 \cdot A = \emptyset,$$

$$1 \cdot A = A.$$

Udowodnij, że  $V$  z tak zdefiniowanym dodawaniem i mnożeniem przez skalary oraz elementem neutralnym  $\emptyset$  jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_2$ .

**Zadanie 4.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{K}$ . Wykaż, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $v, w \in V$ , równość

$$av + bw = aw + bv$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy  $a = b$  lub  $v = w$ .

**Zadanie 5.** Które z następujących podzbiorów przestrzeni wielomianów nad  $\mathbb{R}$  są jej podprzestrzeniami liniowymi?

i) Zbiór wielomianów  $w$  takich, że  $a$  jest pierwiastkiem  $w$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$ .

ii) Zbiór wielomianów stopnia  $\leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

iii) Zbiór wielomianów stopnia  $\geq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

iv) Zbiór wielomianów rozkładalnych na czynniki stopnia  $\leq 1$  nad  $\mathbb{R}$ .