Zadanie 2

Ile elementów ma zbiór $A=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$

$\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Zatem:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n=\left[\frac{\cancel{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cancel{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right]^n=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^n\underset{\text{z Tw de Moivre'a}}{=}\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}$$

Z okresowości cos i sin wystarczy rozpatrzyć $\frac{n\pi}{12}\in\langle 0,2\pi)$

$\Longleftrightarrow \quad n\in\langle 0,24)$

Zatem zbiór A ma 24 elementy.

PUNKTACJA

1 pkt – poprawne rozwiązanie (niewielkie błędy)

0,75pkt – poprawne rozwiązanie ale błędna odpowiedź (zazwyczaj rozpatrywanie $\frac{n\pi}{12}\in\langle 0,\pi)$)

0,5pkt – błędy w rozwiązaniu ale poprawny tok rozumowania (zazwyczaj błędny zapis trygonometryczny)