

Zadania domowe z GALu I, seria 2.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązanie ogólne poniższego układu równań nad \mathbb{C} sprowadzając jego macierz do postaci schodkowej:

$$\begin{cases} x + 2y + iz = 5 \\ ix + (1+i)y + 3z = 2+i \\ 2x + (3-i)y - 2iz = 6-2i \end{cases}$$

Zadanie 2. Znajdź ilość elementów zbioru

$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 3. Niech z_1, z_2, \dots, z_n będą wszystkimi pierwiastkami z 1 stopnia $n \geq 2$. Udowodnij, że

$$\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$ takie, że

$$16z^4 \bar{z}^2 = i|z|^2.$$

Zadanie 5. Naskicuj podzbiór płaszczyzny zespolonej dany nierównościami

i) $|1 - \bar{z}| \geq |z + 2i|,$

ii) $\operatorname{Im}(1+i)z^2 < 0.$