Zadania domowe z GALu I, seria 10.

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Policz $\det(A^2(A^2)^T A^{-1})$.

Zadanie 2. Oblicz wyznacznik następującej macierzy $(n+1) \times (n+1)$ w zależności od $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Oblicz wyznacznik następującej macierzy $n \times n$ w zależności od $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(tj. wszystkie wyrazy poniżej przeciwprzekątnej są równe 0) to

$$\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}.$$

Zadanie 5. Czy istnieje macierz $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ o wyrazach całkowitych parzystych taka, że $\det A = 120$?

Zadanie 6. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dla $k = 0, \dots, n-1$ wektor (n-tkę) $(a_{ij} \colon i - j = k \mod n)$ nazywamy uogólnioną przekątną macierzy A, natomiast n-tkę $(a_{ij} \colon i + j = k \mod n)$ nazywamy uogólnioną przeciwprzekątną macierzy A. Wykaż, że wzór

$$\begin{aligned}&\det A = (\text{suma iloczynów wyrazów na uogólnionych przekątnych macierzy } A)\\ -&(\text{suma iloczynów wyrazów na uogólnionych przeciwprzekątnych macierzy } A)\end{aligned}$$

nie zachodzi jeśli $n > 3$.