Zadania domowe z GALu I, seria 1.

Zadanie 1. Wychodząc z aksjomatów ciała udowodnij, że w dowolnym ciele $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$

i) $(-1) \cdot (-1) = 1$,

ii) $a^{-1} = b^{-1} \implies a = b$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,

iii) $((a + b) + c) + d = (a + c) + (d + b)$ dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

Zadanie 2. Sprawdź które spośród własności: łączność, przemienność, istnienie elementu neutralnego, istnienie elementu odwrotnego mają poniższe działania na zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

i) odejmowanie $(a, b) \mapsto a - b$,

ii) średnia arytmetyczna $(a, b) \mapsto \frac{a+b}{2}$,

iii) działanie $\heartsuit$: $(a, b) \mapsto a \heartsuit b = a \cdot b + a + b$.

Zadanie 3. Udowodnij, że

i) równanie $x^2 + x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{Z}_2$,

ii) równanie $-2y^2 + x^2 + x + 5 = 0$ nie ma rozwiązań pośród liczb całkowitych.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne poniższego układu równań nad $\mathbb{R}$ sprowadzając jego macierz do postaci schodkowej:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 6y + 8z = 2 \\ -5x - 10y - 14z = 0 \\ 4x + 8y + 11z = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5. Znajdź liczbę rozwiązań poniższego układu równań nad $\mathbb{R}$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + 2z + at = 0 \\ 2x + 3y + az + 4t = a \\ x + 2y + 5z - 3t = 2a \end{cases}$$