Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 7. zadań

8 maja 2017

Uwaga. We wszystkich zadaniach z tej serii:

- $B_r(x)$ oznacza **domkniętą** kulę o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i promieniu r,
- E jest zbiorem o lokalnie skończonym obwodzie w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 1. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Przypuśćmy, że funkcjonał $F\colon H \to]-\infty, \infty]$ jest wypukły i półciągły z dołu oraz $F \not\equiv +\infty$. Wykaż, że F szacuje się z dołu przez funkcję afiniczną oraz $F^* \not\equiv +\infty$.

Zadanie 2 (Wniosek 1, s. 203 w [EG]). Niech $x \in \partial^* E$. Oznaczmy

$$H^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon (y-x) \cdot \nu^E(x) \le 0\},$$

$$H^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon (y-x) \cdot \nu^E(x) \ge 0\}.$$

Wykaż, że

- $\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(H^+(x)\cap B_r(x)\cap E)}{r^n} = 0$,
- $\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(H^-(x)\cap B_r(x)\setminus E)}{r^n} = 0$,
- $\lim_{r\to 0^+} \frac{|D\mathbf{1}_E|(B_r(x))}{\omega_{n-1} r^{n-1}} = 1$,

gdzie ω_{n-1} to miara kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^{n-1}$.

Zadanie 3 (Lemat 3, s. 204 w [EG]). Wykaż, że istnieje stała $C > 0$ zależna tylko od n taka, że

$$\mathcal{H}^{n-1}(B) \le C |D\mathbf{1}_E|(B)$$

dla każdego borelowskiego $B \subset \partial^* E$.

Zadanie 4 (Twierdzenie 2, s. 205 w [EG]). Wykaż, że

- $\partial^* E = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$, gdzie $|D\mathbf{1}_E|(N) = 0$, a K_k jest zwartym podzbiorem hiperpowierzchni S_k klasy C^1, $k = 1, 2, \ldots$,
- $\nu^E\big|_{K_k}$ jest wektorem normalnym do S_k,
- $|D\mathbf{1}_E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$.

Zadanie 5 (Lemat 3, s. 208 w [EG]). Oznaczmy

$$\partial_* E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \liminf_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} > 0, \quad \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} < 1 \right\},$$

$$\partial_{\frac{1}{2}} E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = \frac{1}{2} \right\}.$$

Wykaż, że

- $\partial^* E \subset \partial_{\frac{1}{2}} E \subset \partial_* E$,
- $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.