Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 6. zadań

25 kwietnia 2017

Uwaga. We wszystkich zadaniach z tej serii:

- $B_r(x)$ oznacza **domkniętą** kulę o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i promieniu r,
- E jest zbiorem o lokalnie skończonym obwodzie w $\mathbb{R}^n$,
- $P(E, B) := |D\mathbf{1}_E|(B)$ dla dowolnego zbioru **borelowskiego** B.

Zadanie 1 (Relatywna nierówność izoperymetryczna, s. 190 w [EG]). Wykaż, że istnieje stała $C = C(n)$ taka, że

$$\min\left(\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x)), \mathcal{L}^n(E \setminus B_r(x))\right)^{1-\frac{1}{n}} \leq CP(E, B_r(x))$$

dla dowolnej kuli $B_r(x)$.

Zadanie 2 (Lemat 1, s. 195 w [EG]). Niech $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i niech $x \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że

$$\int_{E \cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_{B_r(x)} \varphi \cdot \nu^E \, \mathrm{d}|D\mathbf{1}_E| + \int_{E \cap \partial B_r(x)} \varphi \cdot \nu^{B_r(x)} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

dla $\mathcal{L}$-p. w. $r > 0$.

Zadanie 3 (Lemat 2, s. 196 w [EG]). Wykaż, że istnieją dodatnie stałe $A_1, \ldots, A_5$ zależne tylko od n takie, że dla każdego $x \in \partial^* E$

- $\liminf_{r \to 0^+} r^{-n} \mathcal{L}^n(B_r(x) \cap E) > A_1$,
- $\liminf_{r \to 0^+} r^{-n} \mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E) > A_2$,
- $\liminf_{r \to 0^+} r^{1-n} |D\mathbf{1}_E|(B_r(x)) > A_3$,
- $\limsup_{r \to 0^+} r^{1-n} |D\mathbf{1}_E|(B_r(x)) < A_4$,
- $\limsup_{r \to 0^+} r^{1-n} |D\mathbf{1}_{E \cap B_r(x)}|(\mathbb{R}^n) < A_5$.

Zadanie 4 (Twierdzenie 1, s. 199 w [EG]). Niech $x \in \partial^* E$, $r > 0$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$E_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : r(y - x) + x \in E\},$$
$$H^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y - x) \cdot \nu^E(x) \leq 0\}.$$

Wykaż, że

$$\mathbf{1}_{E_r(x)} \to \mathbf{1}_{H^-(x)} \quad \text{w } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ przy } r \to 0^+.$$