Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 5. zadań

4 kwietnia 2017

Zadanie 1. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że

$$(X, D\mathbf{1}_E) = -X \cdot \nu^E \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E \cap \Omega$$

dla każdego obszaru E klasy C^2 w $\mathbb{R}^n$ i dla każdego $X \in L^\infty(\Omega)$ takiego, że $\operatorname{div} X \in L^1(\Omega)$. W powyższym wzorze $X \cdot \nu^E$ oznacza normalny ślad X na brzegu E.

Definicja. Przypuśćmy, że $E \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym względem $\mathcal{L}^n$. Niech Ω będzie największym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ takim, że E ma lokalnie skończony obwód w Ω. Będziemy nazywać *brzegiem zredukowanym* $\partial^* E$ zbioru E zbiór punktów $x \in \operatorname{supp} |D\mathbf{1}_E| \cap \Omega$ takich, że granica

$$-\nu^E(x) := \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{D\mathbf{1}_E(B_\varrho(x))}{|D\mathbf{1}_E|(B_\varrho(x))}$$

istnieje i spełnia $|\nu^E(x)| = 1$. Funkcję $\nu^E \colon \partial^* E \to \mathbb{S}^{n-1}$ będziemy nazywać uogólnionym wektorem normalnym do E.

Zadanie $\mathbf{1\frac{1}{2}}$. Znajdź $\partial^* E$ i ν^E dla kwadratu $E = [0,1]^2$.

Zadanie 2. Wykaż, że każdy punkt $x \in \partial^* E$ jest punktem Lebesgue'a ν^E względem $|D\mathbf{1}_E|$.