Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 4. zadań

27 marca 2017

Zadanie 1. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$ i niech $\psi \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} \psi \in M(\Omega)$. Ponadto, niech δ_ε będzie standardowym przybliżeniem jedności. Wykaż, że dla dowolnej $\varphi \in C_c(\Omega)$,

$$\int \varphi \operatorname{div} \delta_\varepsilon * \psi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int \varphi \, \mathrm{d}(\operatorname{div} \psi).$$

Zadanie 2. Niech $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Wykaż, że $\delta_\varepsilon * \psi \overset{*}{\rightharpoonup} \psi$ w $L^\infty(\Omega_{\varepsilon_0})$, gdzie

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon_0\}.$$

Zadanie 3. Niech $w \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ dla $q > 1$ i niech $\varepsilon > 0$. Wykaż, że istnieje $u \in BV(\mathbb{R}^{n-1} \times]0,1[)$ takie, że $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} u = w$ oraz $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[)} \leq \varepsilon$. Czy założenie $w \in L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ jest konieczne?