

Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 2. zadań

6 marca 2017

Zadanie 1. Podaj przykład otwartego, ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$ o skończonym obwodzie takiego, że $\mathcal{H}^1(\partial A) = \infty$.

Zadanie 2. Niech Ω będzie obszarem otwartym w \mathbb{R}^n i $u \in BV(\Omega)$. Przypuśćmy, że ciąg $(u_k) \subset BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ spełnia

$$u_k \rightarrow u \text{ w } L^1(\Omega), \quad |Du_k|(\Omega) \rightarrow |Du|(\Omega).$$

Wykaż, że $Du_k \xrightarrow{*} Du$ w $M(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3. Niech Ω będzie obszarem otwartym w \mathbb{R}^n . Wykaż, że jeśli $u \in BV(\Omega)$ i $v \in W^{1,n}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ to $u \cdot v \in BV(\Omega)$.

Zadanie 4. Niech Ω, Ω' będą obszarami otwartymi i niech Φ będzie bilipschitzowskim homeomorfizmem Ω' na Ω . Wykaż, że jeśli $u \in BV(\Omega)$, to $u \circ \Phi \in BV(\Omega')$.