Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 1. zadań

28 lutego 2017

Zadanie 1. Niech Ω będzie ograniczonym obszarem otwartym i niech $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$. Wykaż, że funkcjonał $\Phi\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$\Phi(u) = \int |\nabla u|^2 + \langle f, u\rangle$$

posiada dokładnie jedno minimum.

Zadanie 2. Podaj przykład ciągu $(\varphi_n) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ takiego że $\int |\varphi_n| \leq 1$ oraz $\varphi_n \to \delta_0$ w sensie dystrybucji.

Zadanie 3. Niech $|\mu|$ oznacza wahanie miary wektorowej μ. Wykaż że $|\mu|$ jest miarą. Wykaż, że jeśli μ jest miarą ze znakiem, to $\mu^\pm = \frac{1}{2}(|\mu| \pm \mu)$ sa miarami.

Zadanie 4. Niech μ, ν będą miarami wektorowymi. Zakładając że $\mu \perp \nu$, wykaż że $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ oznacza zbiór skończonych miar Radona na obszarze otwartym Ω o wartościach w $\mathbb{R}^k$. Wykaż, że $(\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k), |\cdot|(\Omega))$ jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 6. Niech $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Wykaż, że

$$|\mu|(\Omega) = \sup\left\{\int \varphi \cdot \mathrm{d}\mu\colon \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^k), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}.$$