# O dualności Erdösa - Sierpińskiego dla miary Lebesgue'a i kategorii Baire'a

Marcin Kysiak

Praca magisterska pod kierunkiem dr. hab. Piotra Zakrzewskiego

**Streszczenie**

Praca zawiera dowód faktu, że funkcja Erdösa - Sierpińskiego na prostej nie może być addytywna. Dodatkowo autor wprowadza definicję zbiorów bardzo pierwszej kategorii (ang: *very meager*) jako odpowiednika zbiorów silnie miary zero. [1] [2]

[1]Klasyfikacja tematyczna w/g AMS: 03E20, 22C05, 28E15, 54H05, 54H11.

[2]Słowa kluczowe: Funkcja Erdösa-Sierpińskiego, zbiór silnie miary zero, zbiór silnie pierwszej kategorii

# Spis treści

# 1 Oznaczenia i podstawowe definicje

Większość oznaczeń używanych w tekście jest standardowych.

Przez przestrzeń polską rozumieć będziemy przestrzeń metryczną ośrodkową, metryzowalną w sposób zupełny. W przestrzeni metrycznej $(X, d)$ przez $B(x, \varepsilon)$ oznaczamy kulę otwartą o środku $x$ i promieniu $\varepsilon$: $B(x, \varepsilon) = \{z \in X : d(x, z) < \varepsilon\}$, natomiast przez $\overline{B}(x, \varepsilon)$ - kulę domkniętą: $\overline{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : d(x, z) \leqslant \varepsilon\}$. Domknięcie kuli otwartej oznaczamy $\overline{B(x, \varepsilon)}$. Jeżeli $x \in X$ a zbiór $F \subset X$ jest domknięty, to przez $dist(x, F)$ oznaczamy odległość (odstęp) $x$ od $F$: $dist(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}$. Przez $B(F, \varepsilon)$ oznaczać będziemy kulę uogólnioną dookoła zbioru $F$: $B(F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$. Przypomnijmy, że jeżeli zbiór $F$ jest zwarty i zawarty w zbiorze otwartym $U$, to istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taki, że $B(F, \varepsilon) \subset U$.

Przez doskonały podzbiór przestrzeni metrycznej rozumiemy jej domknięty, niepusty podzbiór, który nie ma punktów izolowanych. Podzbiór przestrzeni metrycznej jest całkowicie niedoskonały, gdy nie zawiera żadnego zbioru doskonałego.

Przez $Bor(X)$ oznaczać będziemy sigma-algebrę podzbiorów borelowskich przestrzeni metrycznej $X$. Przez miarę borelowską na przestrzeni $X$ rozumieć będziemy $\sigma$ -addytywną, $\sigma$ -skończoną miarę $\mu : Bor(X) \to \mathbb{R}$ taką, że $\forall x \in X \ \ \mu(\{x\}) = 0$.

Jeżeli $G$ jest grupą, $A, B \subset G$, to przez $AB$ oznaczamy zbiór $\{ab : a \in A, b \in B\}$. Jeżeli $g \in G$ to przez $gA$ oznaczamy przesunięcie zbioru $A$ o element $g$: $gA = \{ga : a \in A\}$. Element neutralny działania grupowego w notacji multiplikatywnej oznaczać będziemy symbolem $e$.

Rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów zbioru $X$ nazywamy $\sigma$ - ideałem (właściwym, niegłównym), jeżeli spełnia ona następujące warunki:
(i) $A \in \mathcal{I} \wedge B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{I}$
(ii) $(\forall n \in \omega \ \ A_n \in \mathcal{I}) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{I}$
(iii) $X \notin \mathcal{I}$
(iv) $\forall x \in X \ \ \{x\} \in \mathcal{I}$
Jeżeli $\mathcal{I}$ jest $\sigma$-ideałem na $X$, to przez $\mathcal{I}^*$ oznaczamy filtr dualny do $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}^* = \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$.

Jeżeli mamy $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ na grupie $G$, to powiemy, że $\mathcal{I}$ jest (lewo-) przesuwalny, gdy oprócz powyższych warunków spełnia jeszcze:
(v) $\forall A \in \mathcal{I} \ \forall g \in G \ \ gA \in \mathcal{I}$.

Przypomnijmy definicje podstawowych współczynników kardynalnych związanych z ideałem $\mathcal{I}$ na zbiorze $X$:

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathrm{A}| : \mathrm{A} \subset \mathrm{X} \wedge \mathrm{A} \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} = \mathrm{X}\}$
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subset \mathcal{I} \wedge \forall \mathrm{A} \in \mathcal{I}\ \exists \mathrm{B} \in \mathcal{B}\ \ \mathrm{A} \subset \mathrm{B}\}$

Jeżeli $\mu : Bor(X) \to \mathbb{R}$ jest miarą borelowską na $X$, to przez $\mathcal{N}_\mu(X)$ oznaczamy ideał miary na przestrzeni $X$, tzn. rodzinę $\{A \subset X : \mu^*(A) = 0\}$. Piszemy krótko $\mathcal{N}$, gdy jasne jest z kontekstu na jakiej przestrzeni i dla jakiej miary rozpatrujemy ten ideał.

Przez $\mathcal{M}(X)$ oznaczamy ideał kategorii na przestrzeni $X$, tzn. rodzinę tych podbiorów $X$, które można przedstawić jako przeliczalną sumę zbiorów nigdziegęstych. Przypomnijmy, że jeżeli $X$ jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, to na mocy twierdzenia Baire'a $\mathcal{M}(X)$ jest $\sigma$-ideałem właściwym. Będziemy pisać $\mathcal{M}$, gdy jasne jest z kontekstu na jakiej przestrzeni rozpatrujemy ten ideał.

Przypomnijmy jeszcze, że na przestrzeni polskiej $X$ z miarą borelowską ideały $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ są ortogonalne, tzn. $\exists C \in \mathcal{N}\ \ \exists D \in \mathcal{M}\ \ X = C \cup D$.

Zbiór liczb naturalnych oznaczać będziemy symbolem $\omega$. Liczby kardynalne oznaczać będziemy literami greckiego alfabetu (np. $\kappa$) lub symbolami $\omega_\alpha$. W szczególności $\omega_0 = \omega$, a $\omega_1$ oznacza najmniejszą nieprzeliczalną liczbę kardynalną. Dokładniejsze informacje na temat przyjętych w tej pracy definicji i oznaczeń dla liczb porządkowych i kardynalnych znaleźć można w książce [Ku].

Przez $[A]^\kappa$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $A$ mocy $\kappa$. $[A]^{<\kappa}$ oznacza rodzinę podzbiorów zbioru $A$ mocy mniejszej niż $\kappa$.

$2^\omega$ oznacza przestrzeń wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach w $\{0, 1\}$ z topologią produktową. W $2^\omega$ rozpatrujemy również miarę produktową. Działanie dodawania w $2^\omega$ pochodzi od struktury przeliczalnego produktu grup dwuelementowych: ciągi dodajemy po współrzędnych modulo 2.

Przez $2^{<\omega}$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach w $\{0, 1\}$. Dla $s \in 2^{<\omega}$ definiujemy $[s] = \{x \in 2^\omega : s \subset x\}$. Rodzina $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ stanowi bazę topologii w $2^\omega$.

Przez $C_{\omega_2}$ oznaczamy standardowy forcing dodający $\omega_2$ liczb Cohena:

$$C_{\omega_2} = \{p \,|\, p : dom(p) \to \{0, 1\}; dom(p) \in [\omega_2 \times \omega]^{<\omega}\}$$

Zbiór $C_{\omega_2}$ uporządkowany jest przez odwrotną inkluzję, tzn. $s \leqslant t \Leftrightarrow s \supseteq t$.

Skróty CH i MA oznaczają odpowiednio Hipotezę Continuum i Aksjomat Martina. Przez ZFC rozumiemy standardową aksjomatykę teorii mnogości Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru.

Oznaczenia pewnych zdań symbolami graficznymi (np. $\clubsuit\spadesuit\blacktriangle$) wprowadzone zostały wyłącznie na użytek tej pracy w celu ułatwienia orientacji w tekście. Nie są to oznaczenia powszechnie używane.

# 2 Wstęp

**Definicja 2.1.** *Niech $X$ będzie przestrzenią polską wyposażoną w miarę borelowską. Funkcją Erdösa - Sierpińskiego (na $X$) nazywamy bijekcję $f : X \to X$ o następującej własności:*

$$\forall A \subset X \ \ [A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f[A] \in \mathcal{N}] \ \ \& \ \ [A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow f[A] \in \mathcal{M}]$$

Klasyczne twierdzenie pokazuje, że istnienie takiej funkcji jest niesprzeczne z ZFC (patrz: [BJ]):

**Twierdzenie 2.1 (Erdös - Sierpiński).** *Przy założeniu hipotezy continuum na dowolnej doskonałej przestrzeni polskiej z miarą borelowską istnieje funkcja Erdösa - Sierpińskiego.*

Funkcja Erdösa-Sierpińskiego istnieje również przy założeniu Aksjomatu Martina jak i przy (jeszcze słabszym) założeniu $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{cof}(\mathcal{N})$.

Natomiast - co pokazuje poniższy znany wynik - istnienia funkcji Erdösa - Sierpińskiego nie można udowodnić w ZFC:

**Twierdzenie 2.2.** *Niech $C_{\omega_2}$ będzie forcingiem dodającym $\omega_2$ liczb Cohena, niech $G$ będzie $C_{\omega_2}$ generic nad $V$. Wtedy $V[G] \models$ "nie istnieje funkcja Erdösa - Sierpińskiego".*

**Dowód.** Wiadomo, że jeżeli $G$ jest $C_{\omega_2}$ generic nad $V$, to $V[G] \models \mathrm{non}(\mathcal{N}) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$ (zob. [BJ]). Tymczasem z istnienia funkcji Erdösa-Sierpińskiego natychmiast wynika, że $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$.

$\square$

Funkcja Erdösa-Sierpińskiego z definicji przekształca zbiory pierwszej kategorii na zbiory miary zero i vice versa. Pokażemy teraz, że funkcję Erdösa-Sierpińskiego można skonstruować zakładając istnienie funkcji spełniającej tylko jeden z tych warunków:

**Twierdzenie 2.3.**

1. *Jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to X$ o własności:*

$$\forall A \subset X \ \ A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f[A] \in \mathcal{N}$$

*to istnieje funkcja Erdösa - Sierpińskiego.*

*2. Jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to X$ o własności:*

$$\forall A \subset X \;\; A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow f[A] \in \mathcal{M}$$

*to istnieje funkcja Erdösa - Sierpińskiego.*

**Dowód.** Przeprowadzimy dowód pierwszego punktu (drugiego dowodzi się analogicznie).

Niech $f$ będzie funkcją taką jak w pkt. 1. Weźmy zbiór $D \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^*$. W pierwszym kroku zmniejszamy $D$ do zbioru $G \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^*$ tak, by $G \cap f[G] = \emptyset$ w następujący sposób:

Skoro $D \in \mathcal{N}$, to $f^{-1}[D] \in \mathcal{M}$. Kładziemy $G = D \backslash f^{-1}[D]$. Widać, że $G \in \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}$, bo $f^{-1}[D] \in \mathcal{M}$ oraz $G \subset D$. Ponadto $G \cap f^{-1}[D] = \emptyset$, więc $f[G] \cap D = \emptyset$. Mamy $G \subset D$, a zatem $G \cap f[G] = \emptyset$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że $f[G] \in \mathcal{N}^* \cap \mathcal{M}$, oraz $X \backslash (G \cup f[G]) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.

Mając zbiór $G$ o powyższej własności określamy $g : X \to X$ w następujący sposób:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in G \\ f^{-1}(x) & x \in f[G] \\ x & \text{dla pozostałych argumentów} \end{cases}$$

Oczywiście g jest bijekcją. Pokażemy, że g jest funkcją Erdösa - Sierpińskiego. Weźmy zbiór $A \in \mathcal{M}$. Bez ograniczenia ogólności możemy zakładać, że zachodzi jeden z poniższych przypadków:

(i) $A \subset G$. Wtedy $g[A] = f[A] \in \mathcal{N}$.

(ii) $A \subset f[G]$. Wtedy $g[A] \subset G \in \mathcal{N}$.

(iii) $A \cap (G \cup f[G]) = \emptyset$. Wtedy $g[A] = A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

Widzimy więc, że $g$, podobnie jak wyjściowa funkcja $f$, przekształca zbiory pierwszej kategorii na zbiory miary zero. Ale - jak łatwo zauważyć - $g = g^{-1}$, więc również $\forall A \subset X \;\; A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow g[A] \in \mathcal{M}$. Zatem $g$ jest funkcją Erdösa-Sierpińskiego.

$\square$

Funkcja Erdösa - Sierpińskiego jest izomorfizmem ideałów miary i kategorii. Twierdzenie Erdösa-Sierpińskiego mówi więc, że niesprzecznie (np. przy założeniu CH czy MA) ideały miary i kategorii są izomorficzne. Na ogół łatwo jest zauważyć, czy dana własność ideału jest zachowywana przez izomorfizm ideałów. Najczęstszym zastosowaniem twierdzenia Erdösa - Sierpińskiego jest przenoszenie wyników uzyskanych dla jednego z ideałów $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ na drugi.

W zagadnieniach związanych z badaniem ideałów miary i kategorii na grupach (np. na $\mathbb{R}$ lub na $2^\omega$) często rozważa się jednak przesunięcia zbiorów z ideału. Chcąc wykorzystać twierdzenie Erdösa-Sierpińskiego do dualizowania faktów, w których sformułowaniach pojawiają się przesunięcia zbiorów, musielibyśmy dodatkowo żądać od funkcji Erdösa-Sierpińskiego zachowywania działania grupowego. Pytanie, czy niesprzeczne z ZFC jest istnienie funkcji Erdösa-Sierpińskiego zachowującej działanie dodawania, przypisywane jest Czesławowi Ryll-Nardzewskiemu.

Przykładem zagadnienia, do którego rozwiązania przybliżyć by nas mogło istnienie (w pewnym modelu) takiej funkcji, jest problem (omówiony dokładniej w dalszej części pracy), czy zbiory silnie pierwszej kategorii tworzą $\sigma$-ideał. Addytywna funkcja Erdösa-Sierpińskiego przekształcałaby zbiory silnie miary zero (o których wiemy, że $\sigma$-ideał tworzą) na zbiory silnie pierwszej kategorii - skąd otrzymalibyśmy natychmiast, że (przy założeniu istnienia takiej funkcji) zbiory silnie pierwszej kategorii tworzyłyby $\sigma$-ideał.

W 1998 roku Tomek Bartoszyński w pracy [B] pokazał, że na $2^\omega$ nie istnieje addytywna funkcja Erdösa-Sierpińskiego. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest rozwiązanie analogicznego zagadnienia na $\mathbb{R}$. Dowód, że nie istnieje addytywna funkcja Erdösa-Sierpińskiego znajduje się w rozdziałach 3 i 4.

Ponadto w pracy [BS] Tomek Bartoszyński i Saharon Shelah wykazali, że przy założeniu CH zbiory silnie pierwszej kategorii nie tworzą ideału. W dalszej części pracy (rozdział 5) przedstawimy definicję klasy zbiorów bardzo pierwszej kategorii (*very meager*). Pokażemy (w ZFC), że podobnie jak zbiory silnie pierwszej kategorii są one w pewnym sensie odpowiednikiem zbiorów silnie miary zero oraz że tworzą $\sigma$-ideał. Przedstawimy również inne wyniki związane z tą klasą zbiorów, w szczególności wykażemy, że wiele znanych rezultatów dotyczących zbiorów silnie pierwszej kategorii jest również prawdziwych dla zbiorów bardzo pierwszej kategorii.

# 3 Współczynnik przesuwalności

W rozdziale tym wprowadzimy definicję współczynnika przesuwalności. Przedstawimy również wyliczenie wartości tego współczynnika dla ideału kategorii na dość szerokiej klasie grup polskich oraz dla ideału miary na zbiorze Cantora i prostej.

Następująca definicja została wprowadzona przez Carlsona w pracy [C]:

**Definicja 3.1.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie przesuwalnym $\sigma$-ideałem na grupie $G$. Mówimy ze $\mathcal{I}$ jest (lewo-)$\kappa$-przesuwalny, gdy:*

$$\forall A \in \mathcal{I}\, \exists B \in \mathcal{I}\, \forall T \in [G]^\kappa\, \exists t \in G$$
$$tA \subseteq \bigcap_{s \in T} (sB)$$

Proste stwierdzenie pozwala podać równoważne charakteryzacje $\kappa$-przesuwalności:

**Stwierdzenie 3.1.** *Dla ideału $\mathcal{I}$ na grupie $G$ następujące warunki są równoważne:*

*1.*
$$\forall A \in \mathcal{I}\, \exists B \in \mathcal{I}\, \forall T \in [G]^\kappa\, \exists t \in G$$
$$tA \subseteq \bigcap_{s \in T} (sB)$$

*2.*
$$\forall A \in \mathcal{I}^*\, \exists B \in \mathcal{I}^*\, \forall T \in [G]^\kappa\, \exists t \in G$$
$$TB \subseteq tA$$

*Ponadto, jeżeli $G$ jest grupą przemienną, to powyższym warunkom równoważne są również następujące:*

*3.*
$$\forall A \in \mathcal{I}\, \exists B \in \mathcal{I}\, \forall T \in [G]^\kappa\, \exists t \in G$$
$$TA \subseteq tB$$

*4.*
$$\forall A \in \mathcal{I}^*\, \exists B \in \mathcal{I}^*\, \forall T \in [G]^\kappa\, \exists t \in G$$
$$tB \subseteq \bigcap_{s \in T} (sA)$$

**Dowód.** 1. $\Leftrightarrow$ 2. oraz 3. $\Leftrightarrow$ 4. otrzymujemy poprzez przejście do dopełnień. Pozostaje do sprawdzenia (przy założeniu przemienności grupy) równoważność 1. $\Leftrightarrow$ 3.

$$TA \subseteq tB \Leftrightarrow \forall s \in T \;\; sA \subseteq tB \Leftrightarrow \forall s \in T \;\; t^{-1}A \subseteq s^{-1}B \Leftrightarrow t^{-1}A \subseteq \bigcap_{s \in T} s^{-1}B$$

Zamieniając w ostatnim członie równoważności $T$ na $T^{-1}$ oraz $t^{-1}$ na $t$ otrzymujemy tezę.

$\square$

Wprowadzimy teraz definicję współczynnika przesuwalności, który opisywać będzie, dla jakich $\kappa$ ideał jest $\kappa$-przesuwalny:

**Definicja 3.2.** *Dla przesuwalnego $\sigma$-idealu $\mathcal{I}$ definiujemy współczynnik przesuwalności $\tau$ w następujący sposób:*

$$\tau(\mathcal{I}) = \min\{\kappa : \mathcal{I}\,\text{nie jest}\,\kappa\,\text{przesuwalny}\}$$

Łatwo widać, że jeżeli ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są izomorficzne oraz ich izomorfizm zachowuje działanie grupowe, to $\tau(\mathcal{I}) = \tau(\mathcal{J})$. Dowód, że nie istnieje addytywna funkcja Erdösa - Sierpińskiego przeprowadzimy pokazując, że $\tau(\mathcal{M}) \neq \tau(\mathcal{N})$.

## 3.1 Współczynnik przesuwalności ideału kategorii

Okazuje się, że na dość szerokiej klasie grup metrycznych $\tau(\mathcal{M}) \geqslant \omega_1$. Dla prostej rzeczywistej i zbioru Cantora udowodnił to Carlson w [C]. Prosty dowód, że $\tau(\mathcal{M}(2^\omega)) \geqslant \omega_1$ znajduje sie w pracy [B].

Korzystać będziemy ze znanego twierdzenia Birkhoffa-Kakutaniego ([Ke], tw. 9.1):

**Twierdzenie 3.2 (Birkhoff-Kakutani).** *Jeżeli $G$ jest grupą topologiczną, to $G$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $G$ jest przestrzenią Hausdorffa i punkt $e \in G$ ma przeliczalną bazę otoczeń. Ponadto, jeżeli $G$ jest metryzowalna to na $G$ istnieje metryka lewo-niezmiennicza, tzn. taka, że:*

$$\forall x, y \in G \;\; \forall t \in G \;\; d(tx, ty) = d(x, y).$$

$\square$

**Uwaga.** Korzystając z twierdzenia Birkhoffa-Kakutaniego na grupie metrycznej łatwo wprowadzić metrykę prawo-niezmienniczą równoważną wyjściowej. Istotnie, jeżeli $d$ jest metryką lewo-niezmienniczą, to wystarczy wziąć

$$d'(x,y) = d(x^{-1}, y^{-1}).$$

Poniższe lematy pozwalają uogólnić dowód Carlsona z $\mathbb{R}$ na szerszą klasę grup metrycznych:

**Lemat 3.1.** *Niech $G$ - grupa metryczna zwarta, $K \subseteq G$ - zwarty, $U \subseteq G$ - otwarty. Wtedy*
*a) zbiór $\{t \in G : tK \subseteq U\}$ jest otwarty*
*b) zbiór $\{t \in G : (tK) \cap U \neq \emptyset\}$ jest otwarty.*

**Dowód.** Na potrzeby dowodu ustalmy na $G$ metrykę prawo-niezmienniczą.

Dla dowodu punktu a) wystarczy pokazać, że jeżeli $K \subset U$ to $\exists \varepsilon > 0 : d(t,e) < \varepsilon \Rightarrow tK \subset U$. Weźmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\forall x \in K\, B(x,\varepsilon) \subset U$ - jest to możliwe ze zwartości $G$. Wówczas jeśli weźmiemy $t \in G$ takie, że $d(e,t) < \varepsilon$ to z niezmienniczości metryki mamy $d(x,tx) < \varepsilon$, a stąd mamy: $tK \subset U$.

Dla dowodu punktu b) wystarczy pokazać, że jeżeli $K \cap U \neq \emptyset$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $d(t,e) < \varepsilon \Rightarrow (tK) \cap U \neq \emptyset$. Weźmy $x \in K \cap U$. Wtedy $\exists \varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \subset U$. Ale jak poprzednio, mamy $d(x,tx) < \varepsilon$ dla $t \in G$ takich, że $d(e,t) < \varepsilon$. Widzimy, że wtedy $tx \in U$, zatem:

$$d(e,t) < \varepsilon \Rightarrow (tK) \cap U \neq \emptyset.$$

□

**Wniosek 3.3.** *Niech $G$ - grupa metryczna zwarta, $U, V \subset G$ - otwarte. Wtedy zbiór $\{t \in G : U \subset tV\}$ jest domknięty.*

**Dowód.** Zauważmy, że $U \subset tV \Leftrightarrow U \cap t(G \backslash V) = \emptyset$. Zbior $G \backslash V$ jest zwarty, zatem z punktu b) w poprzednim lemacie wynika, że $\{t \in G : U \cap t(G \backslash V) \neq \emptyset\}$ jest otwarty. Stąd $\{t \in G : U \cap t(G \backslash V) = \emptyset\}$ jest domknięty.

□

**Lemat 3.2.** *Niech $X$ - zwarta przestrzeń metryczna, $F \subseteq X$ - domknięty. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{x \in X : \overline{B}(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset\}$ jest otwarty.*

**Dowód.** Zauważmy, że warunek $\overline{B}(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ oznacza, że każdy punkt zbioru $F$ jest odległy od $x$ o więcej niż $\varepsilon$. Zatem $\overline{B}(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset \Leftrightarrow x \in \{z \in X : dist(z,F) > \varepsilon\}$. Zbiór ten jest otwarty, bo funkcja $dist(z,F)$ jest ciągła.

□

Dzieki powyższym lematom możemy uogólnić następujące twierdzenie z okręgu i zbioru Cantora na szerszą klasę grup metrycznych (por. też: [C], [M])

**Twierdzenie 3.4.** *Niech $G$ będzie grupą metryczną zwartą. Jeżeli $A$ jest gęstym zbiorem typu $G_\delta$, to istnieje ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ taki, że dla dowolnego ciągu elementów grupy $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ istnieje $t \in G$ takie, że*

$$\bigcap_k \bigcup_{n>k} B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq tA$$

**Dowód.** Zapiszmy $A$ jako przecięcie zstępującego ciągu zbiorów otwartych: $A = \bigcap_n D_n,\ \ D_{n+1} \subseteq D_n$. Ciąg $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ defniujemy indukcyjnie tak, by zachować warunek:

$$(\spadesuit) \qquad \forall (x_0, ..., x_n) \in G^{n+1}\ \ \exists t \in G\ \ \forall i \leqslant n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i$$

Przypuśćmy, że mamy już zdefiniowane $\varepsilon_i$ dla $i < n$. Weźmy dowolny ciąg $\langle x_0, x_1, ....x_n\rangle$ elementów $G$ i popatrzmy na zbiór $\{t \in G : \forall i < n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i\}$. Jest to zbiór otwarty na mocy lematu 3.1 oraz - z założenia indukcyjnego - niepusty. Z kolei zbiór $\{t \in G : x_n \in tD_n\} = (D_n {x_n}^{-1})^{-1}$ jest otwarty i gęsty. Zatem $\{t \in G : \forall i < n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i\} \cap \{t \in G : x_n \in tD_n\} = \{t \in G : \forall i < n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i \wedge x_n \in tD_n\}$ jest otwarty i niepusty. Oznacza to, że $\forall (x_0, ..., x_n) \in G^{n+1}\ \ \exists t \in G\ \ [\forall i < n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i] \wedge [x_n \in tD_n]$, zatem zbiory $U_t = \{(x_0, ..., x_n) \in G^{n+1}\ \ [\forall i < n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i] \wedge [x_n \in tD_n]\}$ stanowią pokrycie $G^{n+1}$. Zauważmy jeszcze, że na mocy lematu 3.2 są to zbiory otwarte, więc $\{U_t : t \in G\}$ stanowi pokrycie otwarte $G^{n+1}$. Jako $\varepsilon_n$ bierzemy $\lambda/2$, gdzie $\lambda$ - liczba Lebesgue'a tego pokrycia (wybrana dla metryki $\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{n} d(x_i, y_i)$, gdzie $d$ jest metryką na $G$).

Musimy sprawdzić warunek $\spadesuit$. W tym celu weźmy $(x_0, ..., x_n) \in G^{n+1}$. Wiemy, że zbiór $\{x_0\} \times \{x_1\} \times ... \times \{x_{n-1}\} \times \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G^{n+1}$ ma średnicę mniejszą od $\lambda$, jest więc zawarty w pewnym zbiorze $U_t$. Oznacza to właśnie - z definicji $U_t$ - że $\forall i \leqslant n\ \ \overline{B}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq tD_i$.

Sprawdzimy teraz, że ciąg $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ skonstruowany tak, by spełniał warunek $\spadesuit$, spełnia również tezę twierdzenia:
Weźmy ciąg $\langle B(x_n, \varepsilon_n)\rangle_{n\in\omega}$. Spójrzmy na zbiory $F_n = \{t \in G : B(x_n, \varepsilon_n) \subset tD_n\}$. Z wniosku 3.3 wynika, że są to zbiory domknięte, natomiast z warunku $\spadesuit$ widać, że rodzina $\{F_n : n \in \omega\}$ ma własność skończonych przecięć. Ze zwartości $G$ otrzymujemy, że $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$, weźmy więc $t \in \bigcap_n F_n$. Z definicji

$F_n$ mamy zatem: $\forall n \;\; B(x_n,\varepsilon_n) \subset tD_n$. Stąd:

$$\exists^\infty n \;\; x \in B(x_n,\varepsilon_n) \Rightarrow \exists^\infty n \;\; x \in tD_n \Rightarrow x \in \bigcap_n tD_n = tA.$$

Czyli:

$$\bigcap_k \bigcup_{n>k} B(x_n,\varepsilon_n) \subseteq tA.$$

$\square$

Możemy teraz podać wartość współczynnika przesuwalności ideału kategorii na grupach zwartych. Dowód stanowi uogólnienie argumentu z pracy [C]:

**Twierdzenie 3.5.** *Niech $G$ będzie grupą metryczną zwartą. Wtedy* $\tau(\mathcal{M}(G)) \;\geqslant\; \omega_1$

**Dowód.** Na potrzeby dowodu wprowadźmy na $G$ metrykę lewo-niezmienniczą. Pokażemy, że:

$$\forall A \in \mathcal{M}^* \;\; \exists B \in \mathcal{M}^* \;\; \forall (t_k)_{k=0}^\infty \;\; \exists t \in G \;\; \bigcup_k (t_k B) \subset tA$$

Weźmy dowolny $A \in \mathcal{M}^*$ (bez ograniczenia ogólności zakładamy, że $A \in G_\delta$) oraz dobierzmy do $A$ ciąg $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ z twierdzenia 3.4. Ustalmy podział $\omega$ na rozłączne zbiory nieskończone: $\bigcup_k J_k = \omega$. Znajdujemy punkty $\{x_n : n \in \omega\}$ takie, by $\forall n,k$ zbiór $\bigcup\{B(x_m,\varepsilon_m) \,:\, m \geqslant n, m \in J_k\}$ był gęsty. W tym celu wystarczy dla każdego $k$ wziąć za $\{x_n : n \in J_k\}$ numerację dowolnego przeliczalnego podzbioru gęstego w $G$.

Połóżmy $B_k = \bigcap_n \bigcup_{m>n; m\in J_k} B(x_m,\varepsilon_m)$ oraz $B = \bigcap_k \; B_k$. Wiemy, że $\forall n \;\; \bigcup_{m>n;m\in J_k} B(x_m,\varepsilon_m)$ jest zbiorem gęstym otwartym, zatem dla każdego $k \in \omega$ zbiór $B_k$ jest gęsty typu $G_\delta$. Widzimy zatem, że $B \in \mathcal{M}^*$. Sprawdzimy, że $\forall (t_k)_{k=0}^\infty \;\; \exists t \in G \;\; \bigcup_k (t_k B) \subset tA$:
Weźmy dowolny ciąg $(t_k)_{k=0}^\infty$. Szukamy $t \in G$ takiego, że

$$\forall k \in \omega \;\; t_k B \subset tA.$$

W tym celu wystarczy znaleźć takie $t \in G$, że

$$\forall k \in \omega \;\; t_k B_k \subset tA,$$

Weźmy dowolne $k \in \omega$, dla $m \in J_k$ przyjmijmy oznaczenie $I_m = t_k B(x_m, \varepsilon_m)$. Zauważmy, że na mocy przesuwalności metryki mamy: $I_m = B(t_k x_m, \varepsilon_m)$. Z twierdzenia 3.4 wynika, że:

$$\exists t \in G \ \bigcap_n \bigcup_{m>n} I_m \subset tA,$$

a więc tym bardziej

$$t_k B_k = \bigcap_n \bigcup_{m>n; m \in J_k} I_m \subset tA.$$

□

Do uogólnienia tego rezultatu na szerszą klasę grup potrzebne nam będą jeszcze następujące proste fakty:

**Stwierdzenie 3.6.** *Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni polskiej $X$. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \subset X$ mamy:*

$$A \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \ \ A \cap U \in \mathcal{M}(U)$$

**Dowód.** Łatwo sprawdzić, że dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ oraz dowolnego zbioru $B \subset U$ mamy:

$$B \in \mathcal{M}(U) \Leftrightarrow B \in \mathcal{M}(\overline{U}) \Leftrightarrow B \in \mathcal{M}(X)$$

Dzieki tej obserwacji implikacja "$\Rightarrow$" jest oczywista.

Pokażemy teraz implikację "$\Leftarrow$". Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że $\mathcal{U}$ jest pokryciem przeliczalnym. Ale wtedy $A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \cap A)$ jest przeliczalną sumą zbiorów pierwszej kategorii.

□

**Stwierdzenie 3.7.** *Niech $G$ będzie grupą polską, a $Z < G$ jej podgrupą dyskretną. Wtedy dla każdego $x \in G$ istnieje zbiór otwarty $U_x \subset G$ taki, że $x \in U_x$ oraz dla dla dowolnych $z_1, z_2 \in Z$ mamy:*

$$z_1 \overline{U_x} \cap z_2 \overline{U_x} = \emptyset.$$

**Dowód.** W pierwszym kroku pokażemy ten fakt dla $x = e$. Z twierdzenia Birkhoffa-Kakutaniego (tw. 3.2) na $G$ istnieje metryka $\rho$ równoważna wyjściowej niezmiennicza na lewe przesunięcia. Niech $\varepsilon$ będzie takie, że:

$$\overline{B_\rho(e, 3\varepsilon)} \cap Z = \{e\}$$

Nietrudno pokazać, że $U_e = B_\rho(e, \varepsilon)$ ma żądaną własność.

Dla dowolnego $x \in G$ wystarczy wziąć $U_x = U_e x$.

$\square$

**Lemat 3.3.** *Niech $G$ będzie grupą polską lokalnie zwartą, a $Z \triangleleft G$ jej normalną przeliczalną podgrupą dyskretną. Oznaczmy przez $p : G \to G/Z$ naturalne odwzorowanie ilorazowe. Wtedy dla dowolnego $X \subset G/Z$ mamy*

$$X \in \mathcal{M}(G/Z) \Leftrightarrow p^{-1}[X] \in \mathcal{M}(G).$$

**Dowód.** Spójrzmy na dowolny $x \in G/Z$. Ustalmy dowolny punkt $y \in p^{-1}[\{x\}]$ i wybierzmy otwarty zbiór $U_y \subset G$ z lematu 3.7. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że $\overline{U_y}$ jest zbiorem zwartym. Zauważmy jeszcze, że $p^{-1}[\{x\}] \subset ZU_y$ oraz że $ZU_y = p^{-1}[p[ZU_y]]$. Widzimy stąd, że $V_x = p[ZU_y]$ jest otwartym otoczeniem punktu $x$. Ponadto dla dowolnego $z \in Z$ odwzorowanie $p\restriction zU_y : zU_y \to V_x$ jest różnowartościowe, a zatem (ze zwartości $\overline{U_y}$) jest homeomorfizmem.

Podsumujmy: dla dowolnego $x \in G/Z$ wybraliśmy takie jego otwarte otoczenie $V_x$, że $p^{-1}[V_x]$ jest homeomorficzne z $Z \times V_x$. Zatem, jak łatwo zauważyć, dla dowolnego $x \in G/Z$ i dowolnego $X \subset V_x$ mamy:

$$X \in \mathcal{M}(V_x) \Leftrightarrow p^{-1}[X] \in p^{-1}[V_x].$$

Ale $\{p^{-1}[V_x] : x \in G/Z\}$ stanowi otwarte pokrycie $G$, zatem ze stwierdzenia 3.6 łatwo otrzymujemy tezę.

$\square$

**Twierdzenie 3.8.** *Niech $G$ będzie nieprzeliczalną grupą polską o tej własności, że istnieje $Z \subset G$ - normalna, dyskretna podgrupa przeliczalna, taka, że $G/Z$ jest nieprzeliczalną grupą zwartą. Wtedy $\tau(\mathcal{M}(G)) \geqslant \omega_1$*

**Dowód.** Ustalmy $Z$ jak w założeniach. Niech $p : G \to G/Z$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Z lematu 3.3 mamy:

$$\forall X \subset G/Z \;\; X \in \mathcal{M}^*(G/Z) \Leftrightarrow p^{-1}[X] \in \mathcal{M}^*(G).$$

Sprawdzimy, że:

$$\forall A \in \mathcal{M}^*(G) \;\; \exists B \in \mathcal{M}^*(G) \;\; \forall T \in [G]^\omega \;\; \exists t \in G \quad TB \subseteq tA$$

W tym celu weźmy $A \in \mathcal{M}^*(G)$. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że $A = ZA$ (w razie potrzeby bierzemy $A' \subset A$, $A' = \bigcap_{z \in Z} zA$).

Dzięki temu założeniu $A = p^{-1}[p[A]]$. Skoro $p[A] \in \mathcal{M}^*(G/Z)$, to z $\omega$-przesuwalności $\mathcal{M}(G/Z)$ istnieje zbiór $B' \in \mathcal{M}^*(G/Z)$ taki, że dla dowolnego przeliczalnego $T' \subset G/Z$ istnieje $s \in G/Z$ takie, że $T'B' \subset s\,p[A]$. Weźmy $B = p^{-1}[B']$; łatwo zauważyć, że $B = p^{-1}[p[B]]$. Niech $T$ będzie dowolnym przeliczalnym podzbiorem $G$, bez ograniczenia ogólności zakładamy, że $T = ZT$ (w razie potrzeby zamiast $T$ bierzemy $ZT$); wtedy $T = p^{-1}[p[T]]$. Weźmy $T' = p[T]$. Z $\omega$-przesuwalności $\mathcal{M}(G/Z)$ istnieje $s \in G/Z$ takie, że

$$T'B' \subset s\,p[A]$$

Przykładając $p^{-1}$ do obu stron widzimy, że

$$TB \subset p^{-1}[T'B'] \subset p^{-1}[s\,p[A]]$$

Weźmy $t$ takie, że $s = p(t)$. Wtedy $p^{-1}[s\,p[A]] = p^{-1}[p(t)p[A]] = p^{-1}[p[tA]] = t(AZ) = t(ZA) = tA$ (wiemy, że $AZ = ZA$, bo $Z \triangleleft G$). Widzimy zatem, że

$$TB \subset tA$$

czyli $\mathcal{M}(G)$ jest $\omega$-przesuwalny.

□

**Wniosek 3.9.** *Dla dowolnego $n > 0$ $\tau(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)) \geqslant \omega_1$*

**Dowód.** Natychmiastowy z poprzedniego wniosku: dla $\mathbb{R}^n$ odpowiednią podgrupą jest $\mathbb{Z}^n$.

□

## 3.2 Współczynnik przesuwalności ideału miary

W rozdziale tym przedstawimy wyliczenie wartości wspólczynnika przesuwalności dla ideału miary. Wynik ten dla zbioru Cantora uzyskał T. Bartoszyński w pracy [B]. Ponieważ praca ta istnieje jak na razie jedynie w formie preprintu (zawierającego pewne błędy redakcyjne), prezentujemy tutaj pełny dowód tego twierdzenia.

W dalszej części rozdziału przedstawimy wyliczenie współczynnika przesuwalności ideału miary na prostej. Będzie to główny rezultat rozdziału dotyczącego współczynnika przesuwalności.

### 3.2.1 Współczynnik przesuwalności ideału miary na zbiorze Cantora

**Twierdzenie 3.10 (Bartoszyński).** $\tau(\mathcal{N}(2^\omega)) = 2$.

**Dowód.** Musimy pokazać, że

$$\exists A \in \mathcal{N} \;\; \forall B \in \mathcal{N} \;\; \exists t_1, t_2 \in 2^\omega \;\; \forall t \in 2^\omega$$

$$(t_1 + B) \cap (t_2 + B) \not\supset (t + A),$$

czyli po przejściu do dopełnień:

$$\exists A \in \mathcal{N}^* \;\; \forall B \in \mathcal{N}^* \;\; \exists t_1, t_2 \in 2^\omega \;\; \forall t \in 2^\omega$$

$$(t_1 + B) \cup (t_2 + B) \not\subset (t + A).$$

W rzeczywistości pokażemy, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{N}^*$ taki, że dla dowolnego zbioru domkniętego $C$ miary dodatniej

$$\exists x_1, x_2 \in 2^\omega \;\; \forall x \in 2^\omega$$

$$(x_1 + C) \cup (x_2 + C) \not\subset (x + A).$$

To wystarczy, gdyż każdy zbiór miary pełnej zawiera zbiór domknięty miary dodatniej. Dowód rozpoczniemy od następującego lematu:

**Lemat 3.4.** *Niech $I \subset \omega$ będzie zbiorem skończonym. Rozważmy zbiory $J, J' \subset 2^I$; przyjmijmy następujące oznaczenia: $\varepsilon = 1 - \frac{|J|}{2^{|I|}}$; $\delta = 1 - \frac{|J'|}{2^{|I|}}$. Jeżeli $\delta^2 < \varepsilon$, to istnieją takie $t_1, t_2 \in 2^I$, że*

$$\forall s \in 2^I \;\; (t_1 + J') \cup (t_2 + J') \not\subset (s + J).$$

**Dowód.** Znajdziemy $t_1, t_2 \in 2^I$ tak, by $|(t_1 + J') \cup (t_2 + J')| > |J|$. W tym celu rozważmy zbiór $Z = \{\langle z, t_1, t_2\rangle : z \in (t_1 + J') \cup (t_2 + J')\}$. Ustalmy $z \in 2^I$, spójrzmy na $(Z)_z$. Widzimy, że $(Z)_z = \{\langle t_1, t_2\rangle : z \in (t_1 + J') \vee z \in (t_2 + J')\} = \{\langle t_1, t_2\rangle : t_1 \in z + J' \vee t_2 \in z + J'\}$. Zatem $(2^I \times 2^I)\backslash(Z)_z = \{\langle t_1, t_2\rangle : t_1 \notin z + J' \wedge t_2 \notin z + J'\} = (2^I\backslash(z + J')) \times (2^I\backslash(z + J'))$. Wiemy, że $\frac{|2^I\backslash(z+J')|}{|2^I|} = \delta$, zatem $\frac{|(2^I \times 2^I)\backslash(Z)_z|}{2^{2|I|}} = \delta^2$. Stąd dla dowolnego $z \in 2^I$ mamy $\frac{|(Z)_z|}{2^{2|I|}} = 1 - \delta^2 > 1 - \varepsilon$.

Widzimy zatem, że dla każdego $z \in 2^I$ miara (licząca unormowana) sekcji $(Z)_z$ jest większa od $1-\varepsilon$. Z twierdzenia Fubiniego muszą istnieć $t_1, t_2$ takie, że miara $(Z)_{\langle t_1,t_2\rangle}$ jest większa od $1-\varepsilon$. Ale $(Z)_{\langle t_1,t_2\rangle} = (t_1+J') \cup (t_2+J')$. Ponieważ miara $J$ wynosi dokładnie $1-\varepsilon$, widzimy, że

$$\forall s \in 2^I \ \ (t_1+J') \cup (t_2+J') \not\subset (s+J).$$

□

Dowodzimy teraz twierdzenia. Ustalmy podział $\omega$ na kolejne, skończone, rozłączne przedziały $I_n, n \in \omega$, takie, że $|I_n| = 2^{n+2}$.

Dla każdego $n \in \omega$ wybierzmy $J_n \subset 2^{I_n}$ tak, by:

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5} \geqslant \frac{|J_n|}{2^{|I_n|}} \geqslant 1 - \frac{1}{n^2}$$

Niech

$$F = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ \ x\restriction I_n \notin J_n\}$$

Zatem $F = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ \ x\restriction I_n \in 2^{I_n}\setminus J_n\}$. Ponieważ $|2^{I_n}\setminus J_n| < \frac{1}{n^2}$, a wiemy, że $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, widzimy, że $F \in \mathcal{N}$. Weźmiemy $A = 2^\omega \setminus F$.

Dla dowolnego domkniętego zbioru $C$ miary dodatniej skonstruujemy $x_1, x_2$ takie, że

$$\forall x \in 2^\omega (x_1+C) \cup (x_2+C) \not\subset (x+A))$$

Weźmy dowolny zbiór domknięty $C \subset 2^\omega$ miary dodatniej. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset 2^\omega$ mamy $C \cap U = \emptyset$ lub $C \cap U$ jest zbiorem miary dodatniej. W przeciwnym przypadku zamiast $C$ bierzemy $C' = C \setminus \bigcup\{[s] : s \in 2^{<\omega}, \mu([s] \cap C) = 0\}$. Zbiór $C'$ jest nadal domknięty, gdyż odjęliśmy sumę zbiorów otwartych. Zarazem $\mu(C') = \mu(C)$, gdyż od $C$ odjęliśmy przeliczalną sumę zbiorów miary zero (sumę zbiorów postaci $[s] \cap C$). Przyjmijmy jeszcze następujące oznaczenia:

Dla $s \in 2^{<\omega}$, $n \in \omega$ niech:

$$C_s = \{x\restriction (|s|, \omega) : s \subset x \in C\}$$

$$C\restriction n = \{x\restriction n : x \in C\}.$$

Ciągi $x_1, x_2$ zdefiniujemy indukcyjnie, określając ich obcięcia do przedziałów $I_n$. Przez indukcję określamy ciąg $\langle n_k : n \in \omega\rangle$ oraz $x_i\restriction I_{n_k}$ dla $i = 1, 2$ (poza przedziałami postaci $I_{n_k}$ kładziemy $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$).

Załóżmy, że mamy już zdefiniowane $x_i \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$ dla $i = 1, 2$. Spójrzmy na (skończony!) zbiór $C \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$; niech $t$ będzie liczbą jego elementów. Mamy zatem $C \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_{n_k} = \{s_1, ..., s_t\}$. Dla dowolnego $i \leqslant t$ zbiór $[s_i] \cap C$ jest niepusty (z definicji $C \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$), a więc (z własności zbioru $C$) ma miarę dodatnią. Z twierdzenia Lebesgue'a o gęstości wynika, że w każdym zbiorze postaci $[s_i] \cap C$ dla $i \leqslant t$ jest punkt $r_i \in 2^\omega; r_i \supset s_i$ o tej własności, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu([(r_i) \upharpoonright n] \cap C)}{2^{-n}} = 1$$

Weźmy $l > n_k$ tak duże, żeby dla $n = \max(I_1 \cup ... \cup I_l) + 1$ i dla każdego $i \leqslant t$ zachodziła nierówność:

$$\frac{\mu([(r_i) \upharpoonright n] \cap C)}{2^{-n}} > \frac{t-1}{t}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\mu([(r_i) \upharpoonright n] \cap C)}{2^{-n}} = \mu(2^{I_1 \cup ... \cup I_l} \times C_{r_i \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_l}).$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\mu(2^{I_1 \cup ... \cup I_l} \times C_{(r_i) \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_l}) > \frac{t-1}{t},$$

więc zbiór

$$S = 2^{I_1 \cup ... \cup I_l} \times \bigcap_{i=1}^{t} C_{r_i \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_l}$$

ma miarę dodatnią.

Dla $m > l$ patrzymy na zbiory:

$$J'_m = \{x \upharpoonright I_m : x \in S\}.$$

Odnotujmy w tym miejscu kluczową dla dalszych rozważań własność tych zbiorów:

**Uwaga.** Weźmy dowolne $m > l$. Dla dowolnych $x \in C \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$ oraz $u \in J'_m$ istnieje $y \in C$ taki, że $y \upharpoonright I_1 \cup ... \cup I_k = x$ i $y \upharpoonright I_m = u$.

Kontynuujemy konstrukcję $x_1, x_2$. Zauważmy, że:

$$S \subset \{x \in 2^\omega : \forall m \in \omega \;\; x \upharpoonright I_m \in J'_m\}$$

Z inkluzji tej wynika, że $\mu(\{x \in 2^\omega : \forall m \in \omega \ \ x \restriction I_m \in J'_m\}) > 0$. Pokażemy teraz, że dla nieskończenie wielu m zachodzi nierówność

$$\frac{|J'_m|}{2^{|I_m|}} > 1 - \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^5}}.$$

Rzeczywiście: łatwo sprawdzić, że $\prod_m (1 - \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^5}}) = 0$, zatem w przeciwnym przypadku mielibyśmy $\mu(\{x \in 2^\omega : \forall m \in \omega \ \ x \restriction I_m \in J'_m\}) = 0$.

Za $n_{k+1}$ przyjmujemy pierwsze takie $m > l$. Weźmy $\varepsilon, \delta$ takie, że

$$\frac{|J'_{n_{k+1}}|}{2^{|I_{n_{k+1}}|}} = 1 - \delta$$

$$\frac{|J_{n_{k+1}}|}{2^{|I_{n_{k+1}}|}} = 1 - \varepsilon.$$

Mamy zatem:

$$1 - \delta > 1 - \sqrt{\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}},$$

a więc:

$$\delta^2 < \frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}.$$

Z kolei zbiory $J_n \subset 2^{I_n}$ wybraliśmy tak, że

$$\frac{|J_{n_{k+1}}|}{2^{|I_{n_{k+1}}|}} = 1 - \varepsilon \leqslant 1 - \frac{1}{{n_{k+1}}^2} + \frac{1}{{n_{k+1}}^5},$$

czyli

$$\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5} \leqslant \varepsilon.$$

Z oszacowań tych wynika, że $\delta^2 < \varepsilon$, zatem zbiory $J_{n_{k+1}}$ oraz $J'_{n_{k+1}}$ spełniają założenia lematu 3.4. Istnieją więc ciągi $t_1^{k+1}, t_2^{k+1} \in 2^{I_{n_{k+1}}}$ o tej własności, że:

$$\forall s \in 2^{I_{n_{k+1}}} \ \ (t_1^{k+1} + J'_{n_{k+1}}) \cup (t_2^{k+1} + J'_{n_{k+1}}) \not\subset (s + J_{n_{k+1}})$$

Kładziemy $x_1 \restriction I_{n_{k+1}} = t_1^{k+1}; x_2 \restriction I_{n_{k+1}} = t_2^{k+1}$. To kończy konstrukcję ciągów $x_1, x_2$.

Sprawdzimy, że tak skonstruowane $x_1, x_2$ spełniają tezę twierdzenia. Weźmy dowolne $x \in 2^\omega$, połóżmy $s_n = x\restriction I_n$ dla $n < \omega$. Wiemy, że dla każdego $k \in \omega$

$$(x_1\restriction I_{n_k} + J'_{n_k}) \cup (x_2\restriction I_{n_k} + J'_{n_k}) \not\subset (s_{n_k} + J_{n_k})$$

Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że dla nieskończenie wielu $k$

$$x_1\restriction I_{n_k} + J'_{n_k} \not\subset s_{n_k} + J_{n_k}$$

Oznaczmy przez $U \subset \omega$ zbiór takich $k$. Skonstruujemy $z \in x_1 + C$ taki, że $z \notin x + A$. Dla $k \in U$ możemy znaleźć $u_k \in (x_1\restriction I_{n_k} + J'_{n_k}) \backslash (s_{n_k} + J_{n_k})$. Ciąg $z \in 2^\omega$ określamy indukcyjnie dbając o to by dla dowolnego $k \in \omega$:

1. $z\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k} \in (x_1 + C)\restriction I_1 \cup ... I_{n_k}$
2. $z\restriction I_{n_k} = u_k$.

Przypuśćmy, że mamy już określony $z\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$. Z warunku 1. mamy $z\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k} \in (x_1 + C)\restriction I_1 \cup ... I_{n_k}$, natomiast z wyboru $u_{k+1}$ wiemy, że $u_{k+1} \in x_1\restriction I_{n_{k+1}} + J'_{n_{k+1}}$. Z uwagi poczynionej przy konstrukcji zbioru $J'_{n_{k+1}}$ otrzymujemy $y \in x_1 + C$ taki, że $y\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k} = z\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$ oraz $y\restriction I_{n_{k+1}} = u_{k+1}$. Przyjmujemy $z\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_{k+1}} = y\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_{k+1}}$. Warunki 1. i 2. są w oczywisty sposób spełnione.

Z warunku 1. i z domkniętości zbioru $C$ otrzymujemy, że $z \in x_1 + C$. Z kolei z warunku 2. dla nieskończenie wielu $n$ mamy:

$$z\restriction I_n \notin s_n + J_n$$

zatem (z definicji zbioru $F$) otrzymujemy $z \in x + F = x + (2^\omega \backslash A)$. Stąd:

$$z \in (x_1 + C) \backslash (x + A)$$

□

### 3.2.2 Współczynnik przesuwalności ideału miary na prostej

Okazuje się, że również na prostej rzeczywistej współczynnik przesuwalności wynosi 2.

Zasadniczą część dowodu przeprowadzimy pracując w zbiorze $(0, 1]$ z dodawaniem modulo 1. Na potrzeby dowodu umówmy się, że jeżeli mowa jest o rozwinięciu dwójkowym liczby rzeczywistej, to - o ile wyraźnie nie zaznaczono inaczej - mamy na myśli takie rozwinięcie dwójkowe, w którym występuje nieskończenie wiele jedynek. Rozwinięcia takie nazywać będziemy nieskończonymi; rozwinięcia zawierające od pewnego miejsca same zera nazywać będziemy skończonymi. Będziemy utożsamiać liczbę z jej rozwinięciem dwójkowym (nieskończonym), to znaczy z ciągiem zero-jedynkowym określonym na zbiorze $\omega\backslash\{0\}$. W szczególności w odniesieniu do rozwinięć dwójkowych liczb z $(0,1]$ stosować będziemy oznaczenia typowe dla zbioru Cantora (np. przez $[s]$ oznaczać będziemy zbiór liczb, których rozwinięcia dwójkowe zaczynają się od skończonego ciągu $s$).

Przez $\mu$ (lub czasem $\mu_1$) oznaczać będziemy miarę Lebesgue'a na $(0,1]$. Przez $\mu_2$ i $\mu_3$ oznaczymy miarę Lebesgue'a odpowiednio na $(0,1]^2$ i $(0,1]^3$.

Zanim przystąpimy do dowodu właściwego twierdzenia, pokażemy kilka prostych faktów, z których będziemy korzystać.

**Stwierdzenie 3.11.** *Niech $K=(a,b)\subset\mathbb{R}$. Rozważmy niepusty zbiór mierzalny $X\subset K$ miary dodatniej. Istnieje $x\in X$ taki, że:*

$$dist(x,\mathbb{R}\backslash K)\geqslant\frac{\mu(X)}{3}$$

**Dowód.** W przeciwnym wypadku mielibyśmy $X\subset[a,a+\frac{\mu(X)}{3})\cup(b-\frac{\mu(X)}{3},b]$. Ale wtedy zachodziłaby nierówność $\mu(X)\leqslant\frac{2}{3}\mu(X)$ - sprzeczność.

$\square$

**Definicja 3.3.** *Niech $S$ będzie liczbą taką, że $0<S\leqslant 1$. Powiemy, że zbiór $X\subset(0,1]$ jest $S$-okresowy, gdy*

$$\forall x\in(0,1]\ \ x\in X\Leftrightarrow x+S\in X$$

Odnotujmy proste własności zbiorów okresowych:

**Stwierdzenie 3.12.** *Niech $A,B\subset(0,1]$ będą zbiorami $S$-okresowymi dla pewnego $S>0$. Wtedy następujące zbiory są $S$-okresowe:*

1. $(0,1]\backslash A$; $(0,1]\backslash B$,
2. $A\cap B$; $A\cup B$,
3. $x+A$, $x+B$ *dla dowolnego* $x\in(0,1]$.

$\square$

Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenie: jeżeli $I \subset \omega \backslash \{0\}$ jest zbiorem skończonym, a $J \subset 2^I$, to przez $\widetilde{J}$ oznaczać będziemy zbiór $\{x \in (0,1] : x \restriction I \in J\}$.

**Stwierdzenie 3.13.** *Przy powyższych oznaczeniach zbiór postaci $\widetilde{J}$ jest $\frac{1}{2^{(\min I - 1)}}$ okresowy.*

**Dowód.** Zauważmy, że liczba $\frac{1}{2^{(\min I-1)}}$ ma w rozwinięciu dwójkowym skończonym począwszy od miejsca $(\min I)$ same zera. Przynależność do zbioru $\widetilde{J}$ rozstrzyga się wyłącznie na miejscach w rozwinięciu o numerach z $I$, zatem dodanie liczby $\frac{1}{2^{(\min I-1)}}$ na nią nie wpływa.

□

Stwierdzenie to można częściowo odwrócić:

**Stwierdzenie 3.14.** *Jeżeli zbiór jest $\frac{1}{2^m}$ okresowy, to przynależność liczby do tego zbioru nie zależy od $m$ pierwszych miejsc po przecinku jej rozwinięcia dwójkowego.*

**Dowód.** Dodając do dowolnej liczby $x$ liczbę

$$\frac{1}{2^m} = 0,0000...(m-1\,zer)...0100(0)...$$

zmieniamy ciąg $x \restriction \{1,...,m\}$ na kolejny, w sensie porządku leksykograficznego, element zbioru $2^{\{1,...,m\}}$, natomiast pozostałe cyfry rozwinięcia $x$ pozostają bez zmian. Zatem dodając odpowiednią ilość razy liczbę $\frac{1}{2^m}$, możemy uzyskać dowolny przebieg $x$ na pierwszych $m$ miejscach z zachowaniem przynależności do zbioru.

□

**Twierdzenie 3.15.** $\tau(\mathcal{N}((0,1])) = 2$

**Dowód.** Dowód rozpoczniemy od następującego lematu (por. lemat 3.4):

**Lemat 3.5.** *Niech $J'$ będzie borelowskim podzbiorem $(0,1]$. Przyjmijmy oznaczenie $\delta = 1 - \mu(J')$; weźmy $\varepsilon$ takie, że $\delta^2 < \varepsilon$. Niech $S = \{\langle t_1, t_2\rangle \in (0,1]^2 : \mu((t_1 + J') \cup (t_2 + J')) > 1 - \varepsilon\}$. Wtedy zbiór $S$ jest mierzalny i*

$$\mu_2(S) \geqslant 1 - \frac{\delta^2}{\varepsilon}.$$

**Dowód.** Niech $Z = \{\langle z, t_1, t_2\rangle \in (0,1]^3 : z \in (t_1 + J') \cup (t_2 + J')\}$. Zauważmy, że $Z = Z_1 \cup Z_2$, gdzie:

$$Z_i = \{\langle z, t_1, t_2\rangle : z - t_i \in J'\}; \quad i = 1, 2$$

Zbiór $Z_i$ jest borelowski jako przeciwobraz zbioru borelowskiego $J'$ względem funkcji ciągłej (odejmowania) pomnożony kartezjańsko przez $(0,1]$. Widzimy więc, że $Z$ jest borelowski. Zauważmy jeszcze, że $S = \{\langle t_1, t_2\rangle : \mu((Z)_{\langle t_1, t_2\rangle}) > 1 - \varepsilon\}$, zatem $S$ jest mierzalny.

Pokażemy, że $\mu_3(Z) = 1 - \delta^2$. W tym celu ustalmy dowolne $z \in (0,1]$. Widzimy, że:

$$(Z)_z = \{\langle t_1, t_2\rangle : z \in t_1 + J' \ \vee \ z \in t_2 + J'\} = \{\langle t_1, t_2\rangle : t_1 \in z - J' \ \vee \ t_2 \in z - J'\}$$

Zatem

$$(0,1]^2 \backslash (Z)_z = \{\langle t_1, t_2\rangle : t_1 \notin z - J' \ \wedge \ t_2 \notin z - J'\} = (z - (0,1] \backslash J')^2$$

Widzimy stąd, że dla dowolnego $z \in (0,1]$ $\mu_2((Z)_z) = 1 - \delta^2$, czyli $\mu_3(Z) = 1 - \delta^2$. Z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy:

$$1 - \delta^2 = \mu_3(Z) = \int_S \mu((Z)_{\langle t_1, t_2\rangle}) d\mu_2 + \int_{(0,1]^2 \backslash S} \mu((Z)_{\langle t_1, t_2\rangle}) d\mu_2$$

Mamy:

$$\int_S \mu((Z)_{\langle t_1, t_2\rangle}) d\mu_2 \leqslant \mu_2(S)$$

oraz

$$\int_{(0,1]^2 \backslash S} \mu((Z)_{\langle t_1, t_2\rangle}) d\mu_2 \leqslant (1 - \varepsilon)(1 - \mu_2(S))$$

Zatem:

$$1 - \delta^2 \leqslant \mu_2(S) + (1 - \varepsilon)(1 - \mu_2(S))$$

Stąd po łatwych przekształceniach otrzymujemy:

$$\mu_2(S) \geqslant 1 - \frac{\delta^2}{\varepsilon}.$$

□

Ustalmy podział zbioru $\omega \backslash \{0\}$ na kolejne, rozłączne przedziały skończone $I_n : n > 0$, takie, że $|I_n| = 2^{n+3}$. Zauważmy, że wtedy spełnione są nierówności:

- $\frac{1}{2^{|I_n|}} < \frac{1}{n^5}$
- $\frac{1}{2^{|I_n|}} \leqslant \frac{1}{12}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^5})$ dla $n > 1$

Dla każdego $n > 0$ wybierzmy $J_n \subset 2^{I_n}$ tak, by:

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5} > \frac{|J_n|}{2^{|I_n|}} > 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Dodatkowo zażądajmy, by zbiór $J_n$ składał się z pierwszych $|J_n|$ kolejnych (w sensie porządku leksykograficznego na $2^{I_n}$) elementów zbioru $2^{I_n}$.

Zbiór $A$ określamy następująco: bierzemy $F = \bigcap_m \bigcup_{n>m}((0,1]\backslash\widetilde{J_n})$ i kładziemy $A = (0,1]\backslash F$. [1] Oczywiście $\mu(F) = 0$, zatem $A \in \mathcal{N}^*$.

Pokażemy, że dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{N}^*$ istnieją liczby $x_1, x_2$ takie, że:

$$\forall x \in (0,1] \;\; (x_1 + B) \cup (x_2 + B) \not\subset (x + A)$$

W tym celu weźmy zbiór domknięty $C$ miary dodatniej taki, że $C \subset B\backslash\mathbb{Q}$. Skonstruujemy $x_1, x_2 \in (0,1]$ takie, że:

$$\forall x \in (0,1] \;\; (x_1 + C) \cup (x_2 + C) \not\subset (x + A).$$

Podobnie jak dowodzie dla $2^\omega$ bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że dla każdego zbioru otwartego $U \subset (0,1]$ mamy $\mu(U \cap C) > 0 \vee U \cap C = \emptyset$. Zauważmy jeszcze, że w tej sytuacji dla każdego $s \in 2^{<\omega}$ mamy $\mu([s] \cap C) > 0 \vee [s] \cap C = \emptyset$. Zbiór $[s]$ nie jest co prawda otwarty w $(0,1]$, ale jest postaci $(p,q]$, gdzie $p, q \in \mathbb{Q}$. Zatem jeżeli $(p,q] \cap C \neq \emptyset$, to $(p,q) \cap C \neq \emptyset$, gdyż $C \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Przyjmijmy oznaczenia:

- $\lambda_n = 1 - \mu(\widetilde{J_n})$
- $\varepsilon_n = \frac{1}{4}\lambda_n$

Indukcyjnie określimy:

1. Ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\langle n_k : k \in \omega \rangle$.
2. Zbiory $J'_{n_k} \subset 2^{I_{n_k}}$ takie, że dla każdego $x \in C$ i $s \in J'_{n_{k+1}}$ istnieje $y \in C$ takie, że $y{\restriction} I_1 \cup ... \cup I_{n_k} = x{\restriction} I_1 \cup ... \cup I_{n_k} \;\; \wedge \;\; y{\restriction} I_{n_{k+1}} = s$.

[1] Zauważmy, że zbiór $A$ jest tym samym zbiorem co zbiór użyty w dowodzie dla $2^\omega$, o ile utożsamimy elementy $(0,1]$ z ciągami zero-jedynkowymi.

3. Zbiory $S_k \subset (0,1]^2$ takie, że $\mu_2(S_k) > 1 - \frac{1}{4^{k+1}}$ oraz

$$\forall \langle t_1, t_2 \rangle \in S_k \;\; \mu((t_1 + \widetilde{J'_{n_k}}) \cup (t_2 + \widetilde{J'_{n_k}})) > 1 - \varepsilon_{n_k}.$$

**Uwaga.** Warunek 2. gwarantuje nam, że dla dowolnego wyboru $u_k \in J'_{n_k}$ istnieje $c \in C$ taki, że

$$\forall k \in \omega \;\; c\restriction I_{n_k} = u_k$$

Istotnie: korzystając z warunku 2. możemy skonstruować $c \in C$ indukcyjnie. Mając określone $c\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_k} \in C\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_k}$ dla pewnego $k \in \omega$ patrzymy na $I_{n_{k+1}}$. Wiemy, że $c\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_k} = d\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_k}$ dla pewnego $d \in C$. Zatem, z warunku 2. ciąg $c\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_k}$ możemy przedłużyć na $I_{n_{k+1}}$ zgodnie z $u_{k+1}$ tak, by dla pewnego $d' \in C$ zachodziło $c\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_{k+1}} = d'\restriction I_1, \cup ... \cup I_{n_{k+1}}$. Z domkniętości zbioru $C$ dostajemy, że $c \in C$.

Przypuśćmy, że mamy określone $n_i, J'_{n_i}, S_i$, dla $i \leqslant k$. Popatrzmy na $C\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$ - (skończony!) zbiór obcięć elementów $C$ do przedziału $I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$. Niech $t$ będzie liczbą elementów tego zbioru, możemy więc napisać, że $C\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k} = \{s_1, ... s_t\}$. Z naszych założeń o zbiorze $C$ wiemy, że dla każdego $s \in C\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$ zbiór $[s] \cap C$ ma miarę dodatnią. Postępując analogicznie jak w dowodzie dla $2^\omega$, z twierdzenia Lebesgue'a o gęstości znajdujemy $l > n_k$ oraz $r_s \supset s$ dla każdego $s \in C\restriction I_1 \cup ... \cup I_{n_k}$, $dom(r_s) = I_1 \cup ... \cup I_l$, o tej własności, że zbiór

$$P = 2^{I_1 \cup ... \cup I_l} \times \bigcap_{i=1}^{t} \{x\restriction (|r_{s_i}|, \omega) : r_{s_i} \subset x \in C\} \subset (0,1]$$

ma miarę dodatnią. Dla $m > l$ patrzymy na zbiory

$$J'_m = \{x\restriction I_m : x \in P\}$$

Mamy:

$$P \subset \{x \in (0,1] : \forall m > l \;\; x\restriction I_m \in J'_m\}$$

zatem zbiór po prawej stronie ma miarę dodatnią, stąd:

$$\prod_m \mu(\widetilde{J'_m}) > 0.$$

Przyjmijmy oznaczenie $\delta_m = 1 - \mu(\widetilde{J'_m})$, mamy wtedy:

$$\prod_m (1 - \delta_m) > 0.$$

Łatwo pokazać, że

$$\prod_m (1 - \frac{1}{2^{k+3}}\sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^5}}) = 0,$$

a zatem dla nieskończenie wielu $m \in \omega$ zachodzi:

$$(1 - \delta_m) > (1 - \frac{1}{2^{k+3}}\sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^5}}).$$

Za $n_{k+1}$ bierzemy pierwsze takie $m > l$. Nietrudno sprawdzić, że zbiór $J'_{n_{k+1}}$ spełnia warunek 2.

Zauważmy, że spełniona jest nierówność:

$$1 - \delta_{n_{k+1}} > (1 - \frac{1}{2^{k+3}}\sqrt{\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}}),$$

a więc:

$$\delta^2_{n_{k+1}} < \frac{1}{4^{k+3}}(\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}).$$

Z kolei zbiór $J_{n_{k+1}}$ wybraliśmy tak, że jeżeli przyjmiemy $\lambda_{n_{k+1}} = 1 - \mu(\widetilde{J_{n_{k+1}}})$ to mamy:

$$\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5} < \lambda_{n_{k+1}}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $\frac{1}{4^{k+3}}$ mamy:

$$\frac{1}{4^{k+3}}(\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}) < \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{4^{k+3}}.$$

Ostatecznie:

$$\delta^2_{n_{k+1}} < \frac{1}{4^{k+3}}(\frac{1}{{n_{k+1}}^2} - \frac{1}{{n_{k+1}}^5}) < \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{4^{k+3}},$$

czyli

$$\frac{\delta^2_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}} < \frac{1}{4^{k+3}}.$$

Równoważnie:

$$\frac{\delta^2_{n_{k+1}}}{\frac{1}{4}\lambda_{n_{k+1}}} < \frac{1}{4^{k+2}}.$$

Przyjęliśmy $\varepsilon_{n_{k+1}} = \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{4}$, zatem mamy:

$$\frac{\delta^2_{n_{k+1}}}{\frac{1}{4}\lambda_{n_{k+1}}} = \frac{\delta^2_{n_{k+1}}}{\varepsilon_{n_{k+1}}} < \frac{1}{4^{k+2}}.$$

W szczególności $\delta^2_{n_{k+1}} < \frac{\varepsilon_{n_{k+1}}}{4}$. Z lematu 3.5 natychmiast otrzymujemy szukany zbiór $S_{k+1} = \{\langle t_1, t_2\rangle : \mu((t_1 + \widetilde{J'_{n_{k+1}}}) \cup (t_2 + \widetilde{J'_{n_{k+1}}})) > 1 - \varepsilon_{n_{k+1}}\} \subset (0,1]^2$. Tym samym konstrukcję możemy uznać za zakończoną.

Zauważmy, że skoro $\mu_2(S_k) > 1 - \frac{1}{4^{k+1}}$, to $\bigcap_k S_k \neq \emptyset$. Weźmy $x_1, x_2$ takie, że $\langle x_1, x_2\rangle \in \bigcap_k S_k$. Sprawdzimy, że

$$\forall x \in (0,1] \ \ (x_1 + C) \cup (x_2 + C) \not\subset (x + A).$$

W tym celu weźmy dowolny $x \in (0,1]$. Z warunku 3. i z faktu, że $\langle x_1, x_2\rangle \in S_k$ oraz $\mu(\widetilde{J_{n_k}})) = 1 - \lambda_{n_k} < 1 - \varepsilon_{n_k}$ widzimy, że dla każdego $k \in \omega$

$$(x_1 + \widetilde{J'_{n_k}}) \cup (x_2 + \widetilde{J'_{n_k}}) \not\subset x + \widetilde{J_{n_k}}.$$

Ponadto wiemy, że $\mu((x_1 + \widetilde{J'_{n_k}}) \cup (x_2 + \widetilde{J'_{n_k}})) \geqslant 1 - \varepsilon_{n_k}$ a z drugiej strony $\mu(x + \widetilde{J_{n_k}}) = 1 - \lambda_{n_k}$. Widzimy zatem, że

$$\mu((x_1 + \widetilde{J'_{n_k}}) \cup (x_2 + \widetilde{J'_{n_k}})) \setminus (x + \widetilde{J_{n_k}})) \geqslant (1 - \varepsilon_{n_k}) - (1 - \lambda_{n_k}) = \lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}.$$

Zatem dla każdego $k \in \omega$ zachodzi:

$$\mu((x_1 + \widetilde{J'_{n_k}})) \setminus (x + \widetilde{J_{n_k}})) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{2}$$

lub

$$\mu((x_2 + \widetilde{J'_{n_k}})) \setminus (x + \widetilde{J_{n_k}})) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{2}.$$

Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że dla nieskończenie wielu $k \in \omega$ zachodzi przypadek pierwszy. Oznaczmy przez $U \subset \omega$ zbiór takich $k$. Skonstruujemy $z \in C$ taki, że $x_1 + z \notin x + A$. W tym celu dla każdego $k \in U$ wybierzemy $v_k \in (0,1]$ tak, by $x_1 + v_k \in (x_1 + \widetilde{J'_{n_k}}) \setminus (x + \widetilde{J_{n_k}})$.

Zauważmy, że ponieważ zbiory $(x - x_1) + \widetilde{J_{n_k}}$ i $\widetilde{J'_{n_k}}$ są $\frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}$ okresowe, to powyższa własność liczby $v_k$ nie zależy od jej miejsc po przecinku o numerach mniejszych od $\min I_{n_k}$. Z kolei jeżeli odległość $v_k$ od zbioru $(x - x_1) + \widetilde{J_{n_k}}$ jest dodatnia, to własność ta nie zależy od odpowiednio dalekich miejsc po przecinku. Pokażemy, że $v_k$ można wybrać tak, by numery "istotnych" dla tej własności miejsc po przecinku należały do $I_{n_k}$. W tym celu wystarczy wybrać $v_k$ tak, by $dist(v_k, (x - x_1) + \widetilde{J_{n_k}}) > \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k}|}}$. Pokażemy, że jest to możliwe.

Spójrzmy na zbiór $\widetilde{J_{n_k}}$. Jak zauważyliśmy jest on okresowy o okresie $\frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}$. Ponieważ elementy zbioru $J_{n_k}$ były wybrane jako kolejne w porządku leksykograficznym, to przedział $(0, 1]$ można podzielić na $2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}$ przedziałów postaci $[s] = (p_s, q_s]$ dla $s \in 2^{I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}}$ tak, że istnieją $r_s \in (p_s, q_s)$ o tej własności, że $\widetilde{J_{n_k}} \cap (p_s, q_s] = (p_s, r_s]$. Innymi słowy:

$$\widetilde{J_{n_k}} = \bigcup_s (p_s, r_s]; \qquad (0, 1] \setminus \widetilde{J_{n_k}} = \bigcup_s (r_s, q_s].$$

Wiemy, że

$$\mu((x_1 + \widetilde{J'_{n_k}})) \setminus (x + \widetilde{J_{n_k}})) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{2},$$

zatem również

$$\mu(((x_1 - x) + \widetilde{J'_{n_k}})) \setminus \widetilde{J_{n_k}}) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{2}.$$

Zbiór $(x_1 - x) + \widetilde{J'_{n_k}}$ jest także $\frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}$ - okresowy. Nietrudno również zauważyć, że jeśli $s, t \in 2^{I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}}$ to

$$(p_s, q_s] = (p_t, q_t] + \frac{i}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}$$

oraz

$$(r_s, q_s] = (r_t, q_t] + \frac{i}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}$$

dla pewnego $i < 2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}$.

Wynika stąd, że dla każdych $s, t \in 2^{I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}}$ zachodzi:

$$\mu([(x_1 - x) + \widetilde{J'_{n_k}}] \cap [r_s, q_s)) = \mu([(x_1 - x) + \widetilde{J'_{n_k}}] \cap [r_t, q_t)).$$

Stąd otrzymujemy, że dla dowolnego $s \in 2^{I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}}$ zachodzi:

$$\mu([(x_1 - x) + \widetilde{J'_{n_k}}] \cap [r_s, q_s)) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{2} \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}.$$

Ustalmy dowolne $s \in 2^{I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}}$. Na mocy stwierdzenia 3.11 istnieje $v_k \in \widetilde{J'_{n_k}}$ taki, że $(x_1 - x) + v_k \in (r_s, q_s)$ oraz

$$dist((x_1 - x) + v_k, (0, 1] \setminus (r_s, q_s)) = dist((x_1 - x) + v_k, \widetilde{J_{n_k}}) \geqslant \frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{6} \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}.$$

Od $v_k$ oczekujemy, że

$$dist((x_1 - x) + v_k, \widetilde{J_{n_k}}) = dist(v_k, (x - x_1) + \widetilde{J_{n_k}}) > \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k}|}}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$\frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{6} \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}} > \frac{1}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k}|}}.$$

Równoważnie:

$$\frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{6} > \frac{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k - 1}|}}{2^{|I_1 \cup \ldots \cup I_{n_k}|}} = \frac{1}{2^{|I_{n_k}|}}.$$

Przypomnijmy, że mieliśmy $\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{4}\lambda_{n_k}$, zatem w szczególności $\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k} > \frac{\lambda_{n_k}}{2}$. Stąd:

$$\frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{6} > \frac{\lambda_{n_k}}{12}.$$

Z kolei wiemy, że $\lambda_{n_k} \geqslant \frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_k^5}$

Ostatecznie:

$$\frac{\lambda_{n_k} - \varepsilon_{n_k}}{6} > \frac{\lambda_{n_k}}{12} \geqslant \frac{1}{12}(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_k^5}) \geqslant \frac{1}{2^{|I_{n_k}|}}$$

(ostatnia nierówność wynika z wyboru przedziałów $I_n$).

Podsumujmy zatem: dla $k \in U$ skonstruowaliśmy $v_k \in \widetilde{J'_{n_k}}$ tak, że $x_1 + v_k \notin x + \widetilde{J_{n_k}}$ o tej własności, że dla dowolnego $y \in (0,1]$ mamy:

$$y \restriction I_{n_k} = v_k \restriction I_{n_k} \Longrightarrow x_1 + y \notin x + \widetilde{J_{n_k}}.$$

Ale $v_k \restriction I_{n_k} \in J'_{n_k}$, zatem na mocy uwagi poczynionej przy konstrukcji $J'_{n_k}$ istnieje $z \in C$ takie, że:

$$\forall k \in U \;\; z \restriction I_{n_k} = v_k \restriction I_{n_k}.$$

Widzimy zatem, że $x_1 + z \in x_1 + C$, ale dla nieskończenie wielu $k \in \omega$ mamy: $x_1 + z \notin x + \widetilde{J_{n_k}}$. Stąd:

$$x_1 + z \in (x_1 + C) \cap (x + F) = (x_1 + C) \setminus (x + A),$$

czyli:

$$(x_1 + C) \not\subset (x + A).$$

$\square$

**Wniosek 3.16.** $\tau(\mathcal{N}(\mathbb{R})) = 2$.

**Dowód.** Zauważmy, że $(0,1]$ z dodawaniem modulo 1 jest w istocie izomorficzny z grupą $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ponadto jeżeli $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest naturalnym odwzorowaniem ilorazowym, to mamy:

$$X \in \mathcal{N}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Leftrightarrow p^{-1}[X] \in \mathcal{N}(\mathbb{R}).$$

Dalsza część dowodu przeprowadzamy technikami analogicznymi do dowodu twierdzenia 3.8.

$\square$

# 4 Główne twierdzenie

**Twierdzenie 4.1 (Bartoszyński).** *Nie istnieje addytywna funkcja Erdösa Sierpińskiego na* $2^\omega$.

**Dowód.** Nietrudno zauważyć, że gdyby istniała addytywna funkcja Erdösa - Sierpińskiego na $2^\omega$, to mielbyśmy $\tau(\mathcal{N}(2^\omega)) = \tau(\mathcal{M}(2^\omega))$. Tymczasem wiemy, że $\tau(\mathcal{N}(2^\omega)) = 2$ (twierdzenie 3.10), a $\tau(\mathcal{M}(2^\omega)) \geqslant \omega_1$ (twierdzenie 3.5).

□

Dowód powyższego twierdzenia znajduje się w pracy [B]. Natomiast głównym rezultatem tej pracy jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.2.** *Nie istnieje addytywna funkcja Erdösa Sierpińskiego na* $\mathbb{R}$.

**Dowód.** Podobnie jak w poprzednim twierdzeniu: $\tau(\mathcal{N}(\mathbb{R})) = 2$ (wniosek 3.16), a $\tau(\mathcal{M}(\mathbb{R})) \geqslant \omega_1$ (wniosek 3.9).

□

# 5 Zbiory silnie miary zero, silnie pierwszej kategorii i bardzo pierwszej kategorii

W tym rozdziale pokażemy (przypuszczalnie nie występującą dotychczas w literaturze) charakteryzację zbiorów silnie miary zero. Wychodząc od tej charakteryzacji przedstawimy propozycję definicji klasy zbiorów bardzo pierwszej kategorii. Zbiory bardzo pierwszej kategorii wydają się być, podobnie jak zbiory silnie pierwszej kategorii, dobrym odpowiednikiem $\sigma$-ideału zbiorów silnie miary zero.

Przypomnijmy na początek defnicję zbioru Łuzina i zbioru Sierpińskiego:

**Definicja 5.1.** *Niech $X$ będzie przestrzenią polską z miarą borelowską.*

1. *$L \subset X$ jest zbiorem Łuzina, gdy $|L| > \omega$, ale $\forall F \in \mathcal{M}(X)\ \ |F \cap L| \leqslant \omega$.*
2. *$S \subset X$ jest zbiorem Sierpińskiego, gdy $|S| > \omega$, ale $\forall G \in \mathcal{N}(X)\ \ |G \cap S| \leqslant \omega$.*

Znany fakt mówi, że istnienie zbiorów Łuzina i Sierpińskiego jest niesprzeczne z ZFC (patrz [BJ]):

**Stwierdzenie 5.1.** *Przy założeniu* CH *istnieje zbiór Łuzina i zbiór Sierpińskiego.*

$\square$

## 5.1 Zbiory silnie miary zero

**Definicja 5.2.** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową zupełną. Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest silnie miary zero (ang: strongly null, $A \in \mathcal{SN}((X, d))$ lub krótko $A \in \mathcal{SN}$), gdy:*

$$\forall(\varepsilon_n)_{n\in\omega}\, \exists(I_n)_{n\in\omega}\, A \subset \bigcup_{n\in\omega} I_n$$

*gdzie dla $n \in \omega$ $\varepsilon_n > 0$, a $I_n$ jest zbiorem o średnicy nie większej od $\varepsilon_n$.*

**Uwaga.** W ogólnym przypadku własność bycia zbiorem silnie miary zero zależy od metryki na przestrzeni $X$. Dokładniej: znany jest przykład przestrzeni metrycznej ośrodkowej $Y$ i metryk $d_1, d_2$, zadającyh tę samą topologię, takich, że $Y \in \mathcal{SN}((Y, d_1))$ ale $Y \notin \mathcal{SN}((Y, d_2))$. Niemniej jednak zachodzi następujący znany fakt (por. też lemat 5.2 w dowodzie twierdzenia 5.5):

**Stwierdzenie 5.2.** *Jeżeli $X$ jest przestrzenią polską lokalnie zwartą, to $\mathcal{SN}(X)$ nie zależy od wyboru metryki na $X$.*

**Dowód.** W przestrzeni metrycznej lokalnie zwartej każdy punkt ma otoczenie warunkowo zwarte (tzn. takie, że jego domknięcie jest zwarte). Niech $U_x$ będzie takim otoczeniem dla $x \in X$. Rozważmy przeliczalne podpokrycie $\mathcal{U}$ pokrycia $\{U_x : x \in X\}$. Niech $d_1, d_2$ będa dwoma metrykami na $X$. Pokażemy, że jeżeli $\varphi : (X, d_1) \to (X, d_2)$ jest homeomorfizmem, to

$$\forall A \subset X \;\; A \in \mathcal{SN}(X) \Leftrightarrow \varphi[A] \in \mathcal{SN}(X)$$

Istotnie:

$$\varphi[A] = \varphi[\bigcup_{U \in \mathcal{U}} (\overline{U} \cap A)] = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \varphi[\overline{U} \cap A]$$

Nietrudno zauważyć, że obraz zbioru silnie miary zero przy funkcji jednostajnie ciągłej jest silnie miary zero. Dla każdego $U \in \mathcal{U}$ zbiór $\overline{U}$ jest zwarty, zatem $\varphi \restriction \overline{U}$ jest jednostajnie ciągła. Zatem jeżeli $A \in \mathcal{SN}(X, d_1)$, to $\varphi[\overline{U} \cap A] \in \mathcal{SN}(X, d_2)$ jako obraz zbioru silnie miary zero względem funkcji jednostajnie ciągłej. Stąd otrzymujemy, że $\varphi[A] \in \mathcal{SN}(X, d_2)$ jako przeliczalna suma zbiorów silnie miary zero.

$\square$

Definicja zbiorów silnie miary zero jest klasyczna; stanowi ona naturalne wzmocnienie definicji zbioru miary Lebesgue'a zero. Więcej informacji na temat zbiorów silnie miary zero znaleźć można w książce [BJ]. Z wielu udowodnionych tam faktów odnotujmy w tym miejscu dwa podstawowe:

**Stwierdzenie 5.3.** *Zbiory przeliczalne są silnie miary zero.*

$\square$

**Stwierdzenie 5.4.** *Zbiory silnie miary zero tworzą $\sigma$-ideał.*

$\square$

Twierdzenie Galvina-Mycielskiego-Solovaya pozwala podać inną charakteryzację zbiorów silnie miary zero (por. [GMS]):

**Twierdzenie 5.5 (Galvin-Mycielski-Solovay).** *Niech $G$ będzie dowolną lokalnie zwartą grupą polską.*

$$X \in \mathcal{SN} \Leftrightarrow \;\; \forall D \in \mathcal{M}^* \;\; \exists t \in G \;\; X \subseteq tD$$

**Uwaga.** Twierdzenie Galvina-Mycielskiego-Solovaya na ogół formułowane jest dla $G = \mathbb{R}$ lub $G = 2^\omega$. Można je sformułować w większej ogólności - tak jak wyżej. Ponieważ - jak się wydaje - w literaturze nie występuje ono w tej formie, poniżej przedstawiamy jego ogólny dowód, oparty na dowodzie Millera dla prostej (opublikowanym w artykule [M]).

**Dowód.** Dowodzimy implikacji "$\Leftarrow$". Na potrzeby tej części dowodu ustalmy na $G$ metrykę lewo-przesuwalną - jest to możliwe na mocy twierdzenia Birkhoffa-Kakutaniego (twierdzenie 3.2). Metryka ta nie musi być zupełna, lecz przy dowodze tej implikacji z zupełności nie będziemy korzystać.

Niech $X$ będzie taki, że $\forall D \in \mathcal{M}^* \ \exists t \in G \ \ X \subseteq tD$. Weźmy dowolny ciąg $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$. Niech $\{q_i : i \in \omega\}$ będzie numeracją przeliczalnego zbioru gęstego. Niech $I_n = B(q_n, \varepsilon_n)$. Zbiór $\bigcup_n I_n$ jest otwarty i gęsty, więc z założenia istnieje $t \in G$ takie, że $X \subset t(\bigcup_n I_n) = \bigcup_n B(tq_n, \varepsilon_n)$.

Na potrzeby dalszej części dowodu ustalmy na $G$ metrykę zupełną (niekoniecznie przesuwalną). Dowód implikacji "$\Rightarrow$" rozpoczniemy od następującego lematu:

**Lemat 5.1.** *Niech $D$ będzie zbiorem domkniętym brzegowym, $K, J$ - zbiorami otwartymi warunkowo zwartymi. Wtedy istnieją $\varepsilon > 0$ oraz $\mathcal{F}$ - skończona rodzina zbiorów otwartych zawartych w $J$ takie, że dla dowolnego zbioru otwartego $I \subset K$ o średnicy mniejszej od $\varepsilon$ istnieje $J' \in \mathcal{F}$ taki, że:*

$$(\overline{J'}\ \overline{I}) \cap D = \emptyset$$

**Dowód.** Weźmy dowolny $x \in \overline{K}$. Istnieje $y \in J$ taki, że $yx \in G \backslash D$, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $Jx \subset D$ a $D$ jest zbiorem brzegowym. Zbiór $G \backslash D$ jest otwarty, więc (korzystając z ciągłości dodawania) znajdziemy otoczenie otwarte (w $G$) $I_x$ punktu $x$ oraz otoczenie otwarte $J_x \subset J$ punktu $y$ takie, że

$$\overline{J_x}\, I_x \cap D = \emptyset$$

Rodzina $\{I_x : x \in \overline{K}\}$ stanowi otwarte pokrycie $\overline{K}$, zatem możemy wybrać z niej podpokrycie skończone. Weźmy więc $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ takie, że $\overline{K} \subset \bigcup_{k=1}^n I_{x_k}$. Za $\varepsilon$ przyjmujemy liczbę Lebesgue'a pokrycia $\{I_{x_k} : k = 1, 2...n\}$ a za $\mathcal{F}$ rodzinę $\{J_{x_k} : k = 1, 2...n\}$.

Weźmy teraz dowolny zbiór otwarty $I \subset K$ o średnicy mniejszej od $\varepsilon$. Z wyboru $\varepsilon$ istnieje $k \leqslant n$ takie, że $\overline{I} \subset I_{x_k}$. Ale dla $I_{x_k}$ dobraliśmy $J_{x_k} \in \mathcal{F}$ tak by

$$\overline{J_{x_k}}\, I_{x_k} \cap D = \emptyset$$

Tym bardziej więc

$$(\overline{J_{x_k}\ I}) \cap D = \emptyset$$

□

Potrzebny będzie nam również następujący fakt:

**Lemat 5.2.** *Jeżeli $G$ jest grupą polską lokalnie zwartą, to $\sigma$-ideał $\mathcal{SN}(G)$ jest (obustronnie) przesuwalny i symetryczny.*

**Dowód.** Analogicznie do dowodu stwierdzenia 5.2 - przesunięcia i symetrie są homeomorfizmami. □

Dowodzimy teraz twierdzenia. W pierwszym kroku ustalmy $U$ - warunkowo zwarte otoczenie elementu neutralnego $e$. Podobnie jak w dowodzie ostatniego lematu możemy znaleźć przeliczalny zbiór $H \subset G$ tak, by $G = \bigcup_{x \in H} Ux$. Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że $H$ jest podgrupą $G$.

Weźmy $X \in \mathcal{SN}$ oraz $D \in \mathcal{M}^*(G) \cap G_\delta$. Bez ograniczenia ogólności zakładamy, że $X = XH$ oraz $D = DH$ (w razie potrzeby kładziemy $X' \supset X$ zdefiniowane jako $X' = XH$ oraz $D' \subset D$ $D' = \bigcap_{y \in H}(Dy)$). Dla dalszych rozważań kluczowa będzie następująca prosta obserwacja:

Wystarczy znaleźć $t \in G$ tak, by:

$$(X \cap \overline{U}) \subset tD \cap \overline{U}$$

Rzeczywiście: $X \subset tD \Leftrightarrow \forall y \in H\ (X \cap \overline{U}y) \subset tD \cap \overline{U}y$. Ale ponieważ zarówno $X$ jak i $D$ są niezmiennicze na prawe przesunięcia o elementy z $H$, mnożąc z prawej strony przez $y^{-1}$ otrzymujemy:

$$(X \cap \overline{U}y) \subset tD \cap \overline{U}y \quad \Leftrightarrow \quad X \cap \overline{U} \subset tD \cap \overline{U}$$

Znajdziemy $t$ tak, by $X \cap \overline{U} \subset tD$. W tym celu zapiszmy $G \setminus D$ jako $\bigcup_n F_n$, $F_n \subset F_{n+1}$. Stosując lemat 5.1 konstruujemy drzewo $T \subset \omega^{<\omega}$ oraz $J_s$, $\varepsilon_s$ dla $s \in T$ takie, że:

1. $\varepsilon_s > 0$

2. $J_{s^\frown n}$ jest otwartym podzbiorem $J_s$

3. $\forall s \in T, |s| = n\ \forall I \subset \overline{U}\, diam(I) < \varepsilon_s\ \exists m\ (\overline{J_{s^\frown m}\ I}) \cap F_n = \emptyset$

Konstrukcję tę łatwo wykonać stosując w s-tym kroku lemat dla $K = U$, $J = J_s$, $D = F_{|s|}$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że drzewo $T$ ma skończone poziomy, możemy zatem wziąć $\delta_n = \min\{\varepsilon_s : |s| = n\} > 0$. Ponieważ $X \cap \overline{U} \in \mathcal{SN}$ to istnieje taka rodzina $\{I_n : n \in \omega\}$ taka, że $\forall n \ I_n \subset \overline{U} \ \& \ diam(I_n) < \delta_n$ oraz

$$X \cap \overline{U} \subset \bigcap_m \bigcup_{n>m} I_n$$

Korzystając z własności 1.-3. drzewa $T$ znajdujemy $f$ - nieskończoną gałąź w $T$ taką, że:

$$\forall n \in \omega \ \ (\overline{J_{f\upharpoonright(n+1)}} \ \ \overline{I_n}) \cap F_n = \emptyset$$

Weźmy $t \in G$ takie, że $t^{-1} \in \bigcap_n \overline{J}_{f\upharpoonright n}$. Chcemy sprawdzić, że $X \cap \overline{U} \subset tD$, czyli:

$$t^{-1}(X \cap \overline{U}) \cap (G \backslash D) = \emptyset$$

W tym celu wystarczy

$$\forall k \in \omega \ \ t^{-1}(\bigcap_m \bigcup_{n>m} I_n) \cap F_k = \emptyset$$

Niech $y \in t^{-1}(\bigcap_m \bigcup_{n>m} I_n)$. Wtedy $\exists^\infty n \ y \in t^{-1} I_n$. Ale $t^{-1} \in \overline{J_{f\upharpoonright(n+1)}}$ a $(\overline{J_{f\upharpoonright(n+1)}} \ \ \overline{I_n}) \cap F_n$, zatem dla nieskończenie wielu $n$ mamy: $t^{-1} y \notin F_n$. Skoro jednak ciąg $F_k$ był rosnący, oznacza to, że $\forall k \ \ t^{-1} y \notin F_k$. Mamy zatem

$$t^{-1}(X \cap \overline{U}) \cap (G \backslash D) = \emptyset$$

czyli

$$(X \cap \overline{U}) \subset tD$$

□

Twierdzenie Galvina-Mycielskiego-Solovaya charakteryzuje więc zbiory $\mathcal{SN}$ jako takie, które można przykryć przesunięciem dowolnego zbioru rezidualnego. Pokażemy teraz, że można je również scharakteryzować jako takie zbiory, które można przykryć przeliczalną sumą przesunięć zbioru rezidualnego:

**Stwierdzenie 5.6.** *Niech $G$ będzie dowolną lokalnie zwartą grupą polską. Wtedy dla $X \subset G$ mamy*

$$X \in \mathcal{SN} \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{M}^* \, \exists T \in [G]^\omega \ \ X \subseteq TD$$

**Dowód.** Implikacja z lewej do prawej strony wynika natychmiast z twierdzenia 5.5. Implikacji z prawej do lewej dowodzimy w następujący sposób:

Ustalmy na $G$ metrykę lewo-przesualną (patrz: tw. 3.2). Weźmy zbiór $X$ taki, że $\forall D \in \mathcal{M}^* \exists T \in [G]^\omega \, X \subseteq TD$. Sprawdzimy, że X spełnia definicję $\mathcal{SN}$ (definicja 5.2).

Weźmy ciąg $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n > 0$ dla $n > 0$. Łatwo skonstruować ściśle malejący ciąg $(\delta_n)_{n=1}^\infty$, tak by ciąg

$$\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_3, \delta_3, \delta_3, \delta_4, \delta_4, \delta_4, \delta_4 ...$$

($\delta_i$ powtórzone $i$ razy) był mniejszy "po współrzędnych" od ciągu

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9, \varepsilon_{10} ...$$

Weźmy $I_n = B(q_n, \delta_n)$, gdzie $\{q_i : i \in \omega\}$ jest numeracją pewnego przeliczalnego zbioru gęstego w $G$. Weźmy $D = \bigcap_k \bigcup_{n>k} I_n$. $D \in \mathcal{M}^*$, więc z założenia wiemy, że istnieją $\{t_k : k \in \omega\}$ takie, że $X \subset \bigcup_{k\in\omega}(t_k D)$. Ponieważ $\forall k \;\; D \subset \bigcup_{n>k} I_n$, więc $X \subset \bigcup_{k\in\omega}(t_k(\bigcup_{n>k} I_n)) = \bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n>k}(t_k I_n)$. Wystarczy teraz zauważyć, że dla danego $i$ w sumie $\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n>k}(t_k I_n)$ występuje co najwyżej $i$ kul o promieniu $\delta_i$ (dokładniej: $i$ przesunięć kuli $I_i$). Wynika stąd, że $X$ możemy przykryć kulami o promieniach wyznaczonych przez ciąg

$$\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_3, \delta_3, \delta_3, \delta_4, \delta_4, \delta_4, \delta_4 ...$$

a więc także - z konstrukcji $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ - kulami o promieniach wyznaczonych przez ciąg $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$.

$\square$

**Wniosek 5.7.** *Niech $G$ będzie dowolną lokalnie zwartą grupą polską.*

$$X \in \mathcal{SN}(G) \Leftrightarrow [\forall A \in \mathcal{M}(G) \;\; A \cap X \in \mathcal{SN}(G)]$$

**Dowód.** Implikacja "$\Rightarrow$" jest oczywista.

Dowodzimy "$\Leftarrow$" korzystając z charakteryzacji ze stwierdzenia 5.6. Weźmy $X$ taki, że $\forall A \subset X \;\; A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{SN}$. Weźmy dowolny zbiór $D \in \mathcal{M}^*$. Pokażemy, że istnieje $T \in [G]^\omega$ taki, że $X \subset TD$. Mamy $X \backslash D \in \mathcal{M}(G)$, zatem z założenia istnieje $S \in [G]^\omega$ taki, że $X \backslash D \subset SD$. Ale wtedy dla $T = S \cup \{e\}$ mamy $X \subset TD$.

$\square$

Wniosek ten daje nowy dowód znanego faktu:

**Wniosek 5.8.** *W grupie polskiej lokalnie zwartej zbiór Łuzina jest silnie miary zero.*

**Dowód.** Natychmiast z poprzedniego wniosku: jeżeli $L$ jest zbiorem Łuzina, to $\forall A \subset L \;\; A \in \mathcal{M} \Rightarrow |A| \leqslant \omega \Rightarrow A \in \mathcal{SN}$

□

## 5.2 Zbiory silnie pierwszej kategorii i bardzo pierwszej kategorii

W rozdziale tym przedstawimy propozycję definicji zbiorów bardzo pierwszej kategorii (ang: *very meager*). Podobnie jak zbiory silnie pierwszej kategorii stanowią one w pewnym sensie odpowiednik zbiorów silnie miary zero.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, dotyczącym zbiorów silnie miary zero, postaramy się formułować rezultaty w dość dużej ogólności. Gdy nie będzie to możliwe, przedstawimy wyniki dotyczące konkretnej przestrzeni - najczęściej prostej lub zbioru Cantora.

Wydaje się, że przyjęta powszechnie definicja zbiorów silnie pierwszej kategorii ma sens w dowolnej polskiej grupie lokalnie zwartej z miarą Haara. Przyjmijmy więc umowę, że jeżeli nie zaznaczono wyraźnie w jakiej grupie pracujemy, to rezultat jest ogólny tzn. dotyczy dowolnej grupy polskiej lokalnie zwartej z miarą Haara.

### 5.2.1 Zbiory bardzo pierwszej kategorii - definicja i podstawowe własności

Jako odpowiednik zbiorów $\mathcal{SN}$ dla kategorii traktuje się na ogół zbiory silnie pierwszej kategorii ($\mathcal{SM}$), których definicja pochodzi od dualnego przeformułowania charakteryzacji $\mathcal{SN}$ z twierdzenia 5.5:

**Definicja 5.3.** *Niech $G$ będzie grupą polską lokalnie zwartą z miarą Haara. Zbiór $X \subset G$ jest silnie pierwszej kategorii (ang: strongly meager, $X \in \mathcal{SM}(G)$ lub krótko $X \in \mathcal{SM}$), gdy:*

$$\forall D \in \mathcal{N}^* \, \exists t \in G \;\; X \subseteq tD$$

Zbiory $\mathcal{SM}$ sa to więc zbiory, które można przykryć przesunieciem dowolnego zbioru pełnej miary. Fakt, że każdy zbiór przeliczalny jest silnie pierwszej kategorii wynika z następującego znanego faktu:

**Stwierdzenie 5.9.** *Każdy zbiór mocy mniejszej od* $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ *jest silnie pierwszej kategorii.*

$\square$

Niestety, rodzina $\mathcal{SM}$ nie musi tworzyć $\sigma$-ideału (zob. [BS]):

**Twierdzenie 5.10 (Bartoszyński - Shelah).** *Przy założeniu* CH *zbiory* $\mathcal{SM}(2^\omega)$ *nie tworzą $\sigma$-ideału.*

Zauważmy jednak, że problem ten możemy ominąć, gdy dopuścimy w miejsce jednego przesuniecia w defninicji $\mathcal{SM}$ sumę przeliczalnie wielu przesunięć - przeformułowując dualnie charakteryzację ze stwierdzenia 5.6. Wprowadźmy następujacą definicję:

**Definicja 5.4.** *Niech $G$ będzie grupą polską lokalnie zwartą z miarą Haara. Zbiór $X \subset G$ jest bardzo pierwszej kategorii (ang: very meager, $X \in \mathcal{VM}$), gdy:*

$$\forall D \in \mathcal{N}^* \, \exists T \in [G]^\omega \;\; X \subseteq TD$$

Poniższe dwa fakty są oczywistymi konsekwencjami defincji $\mathcal{VM}$:

**Stwierdzenie 5.11.** *Zbiory $\mathcal{VM}$ tworzą przesuwalny $\sigma$-ideał.*

$\square$

**Stwierdzenie 5.12.** $\mathcal{SM} \subseteq \mathcal{VM}$

$\square$

**Stwierdzenie 5.13.** *Niech $G$ będzie grupą polską lokalnie zwartą z miarą Haara. Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{VM}(G)$ zbiór $A^{-1}$ spełnia warunek:*

$$\forall D \in \mathcal{N}^* \;\; \exists T \in [G]^\omega \;\; A^{-1} \subseteq DT$$

*W szczególności, jeżeli $G$ jest grupą przemienną, to $\mathcal{VM}$ jest $\sigma$-ideałem symetrycznym, tzn.*

$$\forall A \in \mathcal{VM} \;\; A^{-1} \in \mathcal{VM}$$

**Dowód.** Weźmy dowolny zbiór $D \in \mathcal{N}^*$, znajdziemy $T$ - przeliczalny, taki, że $A^{-1} \subset DT$. Bez ograniczenia ogólności zakładamy, że $D = D^{-1}$ (w razie potrzeby zamiast $D$ rozpatrujemy $D' \subset D,\ D' = D \cap D^{-1}$). Z założenia $A \in \mathcal{VM}$, więc istnieje przeliczalny zbiór $T$ taki, że $A \subset TD$. Wtedy $A^{-1} \subset (TD)^{-1} = DT^{-1}$.

□

W dalszej części pracy pokażemy, że zbiory $\mathcal{VM}$ są uniwersalnie pierwszej kategorii (tzn. są pierwszej kategorii względem dowolnej topologii polskiej doskonałej zadającej standardowe zbiory borelowskie). W tej chwili odnotujmy jednak następujące proste stwierdzenie:

**Stwierdzenie 5.14.** $\mathcal{VM} \subset \mathcal{M}$

**Dowód.** Weźmy zbiór $X \in \mathcal{VM}$ oraz $D \in \mathcal{N}^* \cap \mathcal{M}$. Wtedy dla pewnego przeliczalnego $T$ mamy:

$$X \subset TD \in \mathcal{M}$$

□

**Stwierdzenie 5.15.**

$$X \in \mathcal{VM} \Leftrightarrow [\forall A \in \mathcal{N}(G)\ \ A \cap X \in \mathcal{VM}]$$

**Dowód.** Analogiczny do dowodu wniosku 5.7.

□

**Wniosek 5.16.** *Zbiór Sierpińskiego jest bardzo pierwszej kategorii.*

**Dowód.** Analogicznie do dowodu wniosku 5.8

□

**Uwaga.** Można również pokazać, że każdy zbiór Sierpińskiego w $2^\omega$ jest silnie pierwszej kategorii (por. [P]). Dowód tego faktu jest jednak dużo bardziej skomplikowany.

Ponieważ zbiór Sierpińskiego jest nieprzeliczalny, widzimy, że niesprzeczne jest istnienie nieprzeliczalnego zbioru bardzo pierwszej kategorii. Okazuje się jednak, że istnienia takiego podzbioru prostej nie można udowodnić w ZFC. Modyfikując nieznacznie dowód z pracy [C] otrzymujemy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 5.17.** *Niech $C_{\omega_2}$ będzie forcingiem dodającym $\omega_2$ liczb Cohena, niech $G - C_{\omega_2}$ generic nad $V$. Wtedy $V[G] \models \mathcal{VM}(\mathbb{R}) = [\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}$*

**Dowód.** Skorzystamy z następującego lematu zawartego w pracy [C]:

**Lemat 5.3.** *Jeżeli $V \models ZFC$ oraz $c$ jest liczbą Cohena nad $V$, to $V[c] \models$ "istnieje zbiór $D$ pełnej miary, którego każde przesunięcie ma przeliczalne przecięcie z $\mathbb{R} \cap V$".*

$\square$

Dowodzimy teraz twierdzenia: weźmy $X \subset R$, $|X| = \omega_1$. Pokażemy, że $X \notin \mathcal{VM}$. Niech $\{c_\xi : \xi < \omega_2\}$ - liczby Cohena w $V[G]$ dodawane przez $C_{\omega_2}$. Ze standardowych rozważań wiemy, że istnieje $J \subset \{c_\xi : \xi < \omega_2\}$, $\{c_\xi : \xi < \omega_2\} \backslash J = \{c\}$ taki, że $X \in V[\{c_\xi : \xi \in J\}]$. Ale wtedy $c$ jest liczba Cohena nad $V[\{c_\xi : \xi \in J\}]$ oraz $V[G] = V[\{c_\xi : \xi \in J\}][c]$ Z ostatniego lematu w $V[G]$ istnieje zbiór $D \in \mathcal{N}^*$, którego każde przesunięcie ma przeliczalne przecięcie z $\mathbb{R} \cap V[\{c_\xi : \xi \in J\}]$ - a więc i z $X$. $X$ jest nieprzeliczalny, zatem $\forall T \in [R]^\omega \ X \not\subset T + D$.

$\square$

Pokażemy teraz, że zbiory $\mathcal{VM}$ na prostej i w zbiorze Cantora są całkowicie niedoskonałe. Fakt ten wynika co prawda z twierdzenia mówiącego, że zbiory $\mathcal{VM}$ są uniwersalnie pierwszej kategorii (tw. 5.28), jednak można go również łatwo wywnioskować ze znanego twierdzenia Erdösa-Kunena-Mauldina (zob. [EKM], [C]):

**Twierdzenie 5.18 (Erdös-Kunen-Mauldin).** *Dla każdego zbioru doskonałego $P \subset 2^\omega$ (lub odpowiednio $P \subset \mathbb{R}$) istnieje domknięty zbiór $H \in \mathcal{N}(2^\omega)$ (odp. $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$) taki, że $\forall t \in 2^\omega \ P \cap (t + H) \neq \emptyset$.* $\square$

Korzystając z twierdzenia 5.18 otrzymujemy natychmiast wniosek:

**Wniosek 5.19.** *Zbiory $\mathcal{SM}$ na prostej i w zbiorze Cantora są całkowicie niedoskonałe.*

$\square$

Dla pokazania, że również zbiory $\mathcal{VM}$ są całkowicie niedoskonałe potrzebujemy jeszcze następującego faktu, udowodnionego przez Carlsona w pracy [C] dla $2^\omega$ oraz $\mathbb{R}$:

**Twierdzenie 5.20.** *Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ $\sigma$-ideał (podzbiorów prostej lub zbioru Cantora) generowany przez zbiory domknięte miary zero. Wtedy $\tau(\mathcal{E}) \geqslant \omega_1$*

$\square$

**Twierdzenie 5.21.** *Dla każdego zbioru doskonałego $P \subset 2^\omega$ istnieje zbiór $D \in \mathcal{N}^*(2^\omega)$ taki, że*
$$\forall T \in [2^\omega]^\omega \ \ P \not\subset T + D$$

**Dowód.** Weźmy dowolny zbiór doskonały $P \subset 2^\omega$. Z twierdzenia Erdösa-Kunena-Mauldina (tw. 5.18) bierzemy $H \in \mathcal{E}^*(2^\omega)$ taki, że $\forall t \in 2^\omega \ P \not\subset t + H$. Korzystając z $\omega$ - przesuwalności $\mathcal{E}$ możemy znaleźć $D \in \mathcal{E}^*$ (zatem w szczególności $D \in \mathcal{N}^*$) taki, że $\forall T \in [2^\omega]^\omega \ \exists t \in 2^\omega \ T + D \subset t + H$. Łatwo widać, że wtedy $\forall T \in [2^\omega]^\omega \ \ P \not\subset T + D$.

□

**Uwaga.** Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla doskonałych podzbiorów $\mathbb{R}$.

**Wniosek 5.22.** *Zbiory $\mathcal{VM}$ na prostej i w zbiorze Cantora są całkowicie niedoskonałe.* □

Podrozdział ten zakończymy faktem pokazującym związek zbiorów bardzo pierwszej kategorii z badanym w poprzednim rozdziale współczynnikiem przesuwalności ideału miary:

**Stwierdzenie 5.23.** *Niech $G$ będzie grupą polską lokalnie zwartą z miarą Haara. Jeżeli w $G$ istnieje zbiór $\mathcal{VM}$, który nie jest $\mathcal{SM}$, to $\tau(\mathcal{N}(G)) \leqslant \omega$.*

**Dowód.** Sprawdzimy, że $\sigma$-ideał $\mathcal{N}$ nie jest $\omega$-przesuwalny, tzn:
$\exists A \in \mathcal{N} \ \ \forall B \in \mathcal{N} \ \ \exists T \in [G]^\omega \ \ \forall t \in G$
$$tA \not\subset \bigcap_{s \in T} (sB)$$

Weźmy $X \in \mathcal{VM} \backslash \mathcal{SM}$. Mamy $X \notin \mathcal{SM}$, więc znajdzie się zbiór $A \in \mathcal{N}$ taki, że
$$\forall t \in G \ \ (tA) \cap X \neq \emptyset$$
Weźmy dowolny zbiór $B \in \mathcal{N}$. Mamy $X \in \mathcal{VM}$, a zatem
$$\exists T \in [G]^\omega \ \ \bigcup_{s \in T} s(G \backslash B) \supset X$$

Stąd z praw de Morgana otrzymujemy:
$$\exists T \in [G]^\omega \ \ \bigcap_{s \in T} sB \cap X = \emptyset$$

Widzimy, że $\forall t \in G \ (tA) \cap X \neq \emptyset$, a $\bigcap_{s \in T}(sB) \cap X = \emptyset$. Zatem:

$$\forall t \in G \ (tA) \not\subset \bigcap_{s \in T} sB.$$

$\square$

**Uwaga.** Przy założeniu CH w $2^\omega$ istnieje zbiór bardzo pierwszej kategorii, który nie jest silnie pierwszej kategorii (por. tw. 5.26).

### 5.2.2 Zbiory bardzo pierwszej kategorii, a inne klasy zbiorów małych w sensie kategorii

Pokazaliśmy dotąd, że każdy zbiór bardzo pierwszej kategorii jest pierwszej kategorii i że każdy zbiór silnie pierwszej kategorii jest bardzo pierwszej kategorii. Odnotujmy na początek prosty fakt:

**Stwierdzenie 5.24.**

- $\mathcal{VM}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{M}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{VM}(2^\omega) \neq \mathcal{M}(2^\omega)$

**Dowód.** Weźmy dowolny nieprzeliczalny zbiór $F \in \mathcal{M} \cap F_\sigma$. Zawiera on podzbiór doskonały, zatem $F \notin \mathcal{VM}$, bo zbiory $\mathcal{VM}$ są całkowicie niedoskonałe.

$\square$

Biorąc pod uwagę równoważność charakteryzacji $\mathcal{SN}$ z twierdzeń 5.5 oraz 5.6, można by oczekiwać, że również $\mathcal{SM} = \mathcal{VM}$. Okazuje się jednak, że równość $\mathcal{SM} = \mathcal{VM}$ jest niezależna od ZFC:

**Stwierdzenie 5.25.** *Niesprzeczne jest, że* $\mathcal{SM}(\mathbb{R}) = \mathcal{VM}(\mathbb{R})$.

**Dowód.** Łatwo zauważyć, że każdy zbiór przeliczalny jest silnie pierwszej kategorii, zatem mamy:

$$[\mathbb{R}]^{\leqslant\omega} \subset \mathcal{SM}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{VM}(\mathbb{R})$$

Pokazaliśmy(twierdzenie 5.17), że niesprzecznie $[\mathbb{R}]^{\leqslant\omega} = \mathcal{VM}(\mathbb{R})$. Wtedy jednak $[\mathbb{R}]^{\leqslant\omega} = \mathcal{SM}(\mathbb{R}) = \mathcal{VM}(\mathbb{R})$.

$\square$

**Twierdzenie 5.26.** *(*CH*)* $\mathcal{VM}(2^\omega) \neq \mathcal{SM}(2^\omega)$

**Dowód.** Wynika z faktu, że przy założeniu CH zbiory $\mathcal{SM}(2^\omega)$ nie tworzą sigma-ideału ([BS]).

□

**Definicja 5.5.** *Niech $X$ bedzie dowolną doskonałą przestrzenią polską. Zbiór $A \subset X$ jest uniwersalnie pierwszej kategorii ($A \in \mathcal{UM}$), gdy dla dowolnego borelowskiego izomorfizmu $f : X \to X$ zachodzi: $f[A] \in \mathcal{M}(X)$*

Korzystać będziemy z następującej charakteryzacji zbiorów $\mathcal{UM}$ (patrz: [Z]):

**Twierdzenie 5.27 (Zakrzewski).** *Następujące warunki są równoważne:*
*(i)* $X \in \mathcal{UM}$
*(ii) dla dowolnej doskonałej przestrzeni polskiej $Y$ i dowolnego $B \subset Y$:*
*Jeżeli istnieje ciągła i różnowartościowa funkcja $f : B \to X$, to $B \in \mathcal{M}(Y)$.*

□

Zmierzać będziemy teraz do pokazania, że na prostej i w zbiorze Cantora każdy zbiór bardzo pierwszej kategorii jest uniwersalnie pierwszej kategorii. Dowód w znacznej mierze oparty będzie na dowodach twierdzeń A. Nowika, z których w szczególności wynika, że $\mathcal{SM} \subset \mathcal{UM}$ (por. [NW] i [NSW]). Twierdzenia udowodnione przez Nowika są w rzeczywistości mocniejsze; z drugiej strony operują one pewnymi dodatkowymi definicjami klas małych zbiorów. Chcąc uniknąć wnikania w tego typu niuanse zaprezentuję kompletny dowód inkluzji $\mathcal{VM} \subset \mathcal{UM}$. Część rozumowania pochodzącą z dowodu Nowika ująć można w następujący lemat (por. [NW]):

**Lemat 5.4 (Nowik).** *Niech $X$ będzie doskonałą przestrzenią polską. Załóżmy, że zbiór $A \subset X$ spełnia warunek:*

($\blacktriangle$) *Dla każdego ciągu zbiorów doskonałych $\{Q_n : n \in \omega\}$ istnieje ciąg zbiorów domkniętych $\{F_m : m \in \omega\}$ taki, że $A \subset \bigcup_m F_m$, ale $\forall n, m \in \omega \;\; Q_n \not\subset F_m$*

*Wtedy $A$ jest uniwersalnie pierwszej kategorii.*

**Dowód.** (por. Fakt 5 w pracy [NW]) Weźmy zbiór $A$ spełniający warunek $\blacktriangle$, sprawdzimy warunek z twierdzenia 5.27. W tym celu weźmy dowolną różnowartościową i ciągłą funkcję $f : B \to A$, gdzie $B$ jest podzbiorem doskonałej przestrzeni polskiej $Y$, pokażemy, że $B \in \mathcal{M}(Y)$. Niech $\{U_n : n \in \omega\}$ będzie przeliczalną bazą topologii w $Y$. Niech $J = \{m \in \omega : |U_m \cap B| > \omega\}$. Ponieważ $f$ jest różnowartościowa, to dla $n \in J$ mamy $|f[U_n \cap B]| > \omega$. Możemy zatem znaleźć doskonały zbiór $Q_n \subset \overline{f[U_n \cap B]}$. Z warunku $\blacktriangle$ istnieją zbiory domknięte $\{F_m : m \in \omega\}$ takie, że $A \subset \bigcup_n F_n$ ale $\forall m \in \omega\ \forall n \in J\ Q_n \not\subset F_m$. Spójrzmy na $f^{-1}[F_m]$. Ponieważ $f$ jest funkcją ciągłą, to są to zbiory domknięte w $B$. Możemy więc znaleźć zbiory $\{K_m : m \in \omega\}$ - domknięte w $2^\omega$ takie, że $f^{-1}[F_m] = B \cap K_m$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że $B \subset \bigcup_m K_m$, dlatego, że $A \subset \bigcup_m F_m$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $\forall m \in \omega\ \ |int(K_m) \cap B| \leqslant \omega$.
   W tym przypadku $B \subset \bigcup_m [(int(K_m) \cap B) \cup (K_m \setminus int(K_m))] \in \mathcal{M}$.

2. $\exists m_0\ \ |int(K_{m_0}) \cap B| > \omega$
   W tym przypadku $B$ musi mieć nieprzeliczalne przecięcie z pewnym zbiorem bazowym $U_{n_0}$ zawartym w $int(K_{m_0})$: $|U_{n_0} \cap B| > \omega \wedge U_{n_0} \subset int(K_{m_0})$. Wynika stąd, że $n_0 \in J$, zatem dla $n_0$ wybraliśmy zbiór doskonały $Q_{n_0} \subset \overline{f[U_{n_0} \cap B]}$. Mamy więc $U_{n_0} \cap B \subset K_{m_0} \cap B = f^{-1}[F_{m_0}]$ a stąd $Q_{n_0} \subset \overline{f[U_{n_0} \cap B]} \subset \overline{f[f^{-1}[F_{m_0}]]} = \overline{F_{m_0}} = F_{m_0}$. Otrzymujemy $Q_{n_0} \subset F_{m_0}$ - sprzeczność z warunkiem $\blacktriangle$, zatem przypadek ten nigdy nie zachodzi.

$\square$

**Twierdzenie 5.28.** *Zachodzą inkluzje:*

- $\mathcal{VM}(2^\omega) \subset \mathcal{UM}(2^\omega)$
- $\mathcal{VM}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{UM}(\mathbb{R})$

**Dowód.** (por. Twierdzenie 9 w pracy [NSW].) Korzystając z lematu 5.4 musimy sprawdzić, że każdy zbiór $A \in \mathcal{VM}$ spełnia warunek $\blacktriangle$. W tym celu weźmy $A \in \mathcal{VM}$ oraz ciąg zbiorów doskonałych $\{Q_n : n \in \omega\}$. Korzystając z twierdzenia Erdösa - Kunena - Mauldina (tw. 5.18) do każdego zbioru $Q_n$ dobieramy zbiór $H_n \in \mathcal{N}$ taki, że $Q_n + H_n = 2^\omega$. Zbiór $\bigcup_n H_n$ jest miary zero, więc istnieje $G \in \mathcal{N} \cap G_\delta(2^\omega)$ taki, że $\bigcup_n H_n \subset G$. Spójrzmy na zbiór $F = 2^\omega \setminus G$. $F \in \mathcal{N}^*$, więc z definicji $\mathcal{VM}$ istnieje zbiór $\{t_k : k \in \omega\}$ taki, że $A \subset \bigcup_k (t_k + F)$. Dla każdego $k$ zbiór $(t_k + F)$ jest typu $F_\sigma$, więc łatwo dobrać zbiory domknięte $F_m$ tak by $A \subset \bigcup_m F_m$ oraz $\forall m\ \exists k\ \ F_m \subset (t_k + F)$.

Sprawdzimy, że zbiory $F_m$ spełniają warunek ▲. Weźmy $Q_n, F_m$, przypuśćmy, że $Q_n \subset F_m$. Do $Q_n$ dobraliśmy zbiór $H_n$ tak, by $\forall t \in 2^\omega \ (t + H_n) \cap Q_n \neq \emptyset$. Ale $H_n \subset G$, więc $\forall t \in 2^\omega \ (t + G) \cap Q_n \neq \emptyset$. Przypuściliśmy, że $Q_n \subset F_m$, zatem również $\forall t \in 2^\omega \ (t + G) \cap F_m \neq \emptyset$. Ale zbiory $F_m$ były wybrane tak, że dla $F_m$ istnieje takie $t_k$, że $F_m \subset t_k + (2^\omega \setminus G)$ czyli $(t_k + G) \cap F_m = \emptyset$ - sprzeczność.

□

Okazuje się jednak, że można (pracując w ZFC) podać przykład zbioru, ktory jest uniwersalnie pierwszej kategorii, ale nie jest bardzo pierwszej kategorii. Dowód oparty jest na dowodzie twierdzenia E. Grzegorka, mówiącego, że istnieje zbiór uniwersalnie miary zero, który nie jest silnie miary zero oraz na (niepublikowanej) modyfikacji tego dowodu, dokonanej przez P. Zakrzewskiego, w celu uzyskania faktu dualnego: istnieje zbiór uniwersalnie pierwszej kategorii, który nie jest silnie pierwszej kategorii.

**Twierdzenie 5.29.** *Istnieje zbiór $A \subset 2^\omega$ taki, że $A \in \mathcal{UM}(2^\omega)$, ale $A \notin \mathcal{VM}(2^\omega)$*

**Dowód.** Skonstruujemy zbiór $F \subset 2^\omega \times 2^\omega : F \in \mathcal{UM} \setminus \mathcal{VM}$. Szukany $A \subset 2^\omega$ otrzymamy za pomocą standardowego utożsamienia $\psi : 2^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$ określonego wzorem:

$$\psi(x,y)(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ y(\frac{n-1}{2}) & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $\psi$ jest homeomorfizmem zachowującym miarę i izomorfizmem grup, zatem przeprowadza zbiory $\mathcal{VM}$ na zbiory $\mathcal{VM}$, a zbiory $\mathcal{UM}$ na zbiory $\mathcal{UM}$.

Korzystamy z faktu udowodnionego przez Grzegorka ([G1], [G2]): istnieje zbiór $\mathcal{UM}$ równoliczny z pewnym zbiorem drugiej kategorii.

Niech $F : A \to B$ będzie bijekcją między zbiorem $A \subset 2^\omega$; $A \notin \mathcal{M}$ i zbiorem $B \subset 2^\omega$; $B \in \mathcal{UM}$. Twierdzę, że $F \subset 2^\omega \times 2^\omega$ jest szukanym zbiorem.

Mamy $F \in \mathcal{UM}$, gdyż w przeciwnym przypadku (twierdzenie 5.27) dla pewnej przestrzeni $Y$ i pewnego zbioru $C \subset Y \ \ C \notin \mathcal{M}(Y)$ istniałaby różnowartościowa funkcja borelowska $f : C \to F$. Ale wtedy funkcja $g = \pi_2 \circ f$ przeczyłaby temu, że $B \in \mathcal{UM}$.

Aby pokazać, że $F \notin \mathcal{VM}$ sprawdzimy, że rzut zbioru $\mathcal{VM}$ jest $\mathcal{VM}$. (Z tego natychmiast wyniknie teza, gdyż $\pi_1[F] = A \notin \mathcal{M}$).

W tym celu weźmy dowolny $X \in \mathcal{VM}(2^\omega \times 2^\omega)$ oraz $D \in \mathcal{N}^*(2^\omega)$. Sprawdzimy, że $\pi_1[X] \subset T+D$ dla pewnego zbioru przeliczalnego $T$. Spójrzmy na zbiór $D' = D \times 2^\omega \subset 2^\omega \times 2^\omega$. Widzimy, że $D' \in \mathcal{N}^*(2^\omega \times 2^\omega)$, a $X \in \mathcal{VM}(2^\omega \times 2^\omega)$, więc istnieją takie $\langle x_i, y_i\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$; $i \in \omega$, że $X \subset \bigcup_i(\langle x_i, y_i\rangle + D')$. Ale $\langle x_i, y_i\rangle + D' = \langle x_i, 0\rangle + D' = (x_i + D) \times 2^\omega$, więc $\pi_1[X] \subset \bigcup_i(x_i + D)$.

$\square$

### 5.2.3 Inne charakteryzacje zbiorów bardzo pierwszej kategorii

**Stwierdzenie 5.30.** *Zbiór $A \subset G$ jest bardzo pierwszej kategorii, wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall D \in \mathcal{N}^* \ \exists (A_n)_{n=0}^\infty \ \exists (t_n)_{n=0}^\infty \in G^\omega \ \ A \subset \bigcup_{n=0}^\infty A_n \wedge t_n A_n \subset D$$

**Dowód.** Weźmy $A \in \mathcal{VM}$, weźmy dowolne $D \in \mathcal{N}^*$. Z definicji $\mathcal{VM}$ istnieje ciąg $(s_n)_{n=0}^\infty$ taki, że $A \subset \bigcup_n s_n D$. Bierzemy $A_n = s_n D$ oraz $t_n = s_n^{-1}$. Łatwo widać, że wtedy $A \subset \bigcup_n A_n$ oraz $t_n A_n \subset D$.

Implikacji w stronę przeciwną dowodzimy analogicznie.

$\square$

**Definicja 5.6.** *Rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ nazywamy $\kappa$-pokryciem, gdy każdy podzbiór zbioru $X$ mocy mniejszej od $\kappa$ jest zawarty w pewnym elemencie rodziny $\mathcal{A}$.*

**Stwierdzenie 5.31.** *Zbiór $A \subset G$ jest bardzo pierwszej kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $H \in \mathcal{N}$ rodzina $\{xH : x \in A\}$ nie jest $\omega_1$-pokryciem.*

**Dowód.** Weźmy $A \in \mathcal{VM}(G)$ oraz dowolny $H \in \mathcal{N}$. Na mocy stwierdzenia 5.13 istnieje ciąg $(t_n)_{n=0}^\infty$ taki, że $A^{-1} \subset \bigcup_n (G \backslash H) t_n^{-1}$. Oznacza to, że

$$\forall x \in A \ \exists n \in \omega \ \ x^{-1} \notin H t_n^{-1}$$

Stąd mamy:

$$\forall x \in A \ \exists n \in \omega \ \ t_n \notin xH$$

Weźmy $T = \{t_n : n \in \omega\}$. Wtedy:

$$\forall x \in A \ \ T \not\subset xH$$

czyli $T$ świadczy o tym, że $\{xH : x \in A\}$ nie jest $\omega_1$-pokryciem.

Implikacji przeciwnej dowodzimy analogicznie.

$\square$

### 5.2.4 Pytania otwarte dotyczące zbiorów bardzo pierwszej kategorii

W związku z badaniem zbiorów bardzo pierwszej kategorii nasuwają się następujące pytania:

**Problem 5.1.** Twierdzenie 5.17 pokazuje w szczególności, że niesprzecznie każdy zbiór bardzo pierwszej kategorii jest przeliczalną sumą zbiorów silnie pierwszej kategorii. Czy można ten fakt udowodnić w ZFC? Inaczej: czy $\mathcal{VM}$ jest najmniejszym $\sigma$-ideałem zawierającym $\mathcal{SM}$?

**Problem 5.2.** Czy można podać prosty i bezpośredni dowód faktu, że przy założeniu hipotezy continuum $\mathcal{VM} \neq \mathcal{SM}$? (twierdzenie 5.26)

# Bibliografia

[B] T. Bartoszyński *A note on duality between measure and category.* Preprint.

[BJ] T. Bartoszyński, H. Judah *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A K Peters, Ltd. 1985.

[BS] T. Bartoszyński, S. Shelah *Strongly meager sets are not an ideal.* Preprint.

[C] T.J. Carlson *Strong measure zero and strongly meager sets.* Proceedings of the American Mathematical Society, 118(2):577-586, 1993.

[EKM] P. Erdös, K. Kunen, R. Mauldin *Some additive properties of sets of real numbers.* Fund. Math. 113 (1981) 187-199.

[GMS] F. Galvin, J. Mycielski, R. Solovay *Strong measure zero sets.* Notices of American Mathematical Society, pages A-280, 1973.

[G1] E. Grzegorek *Always of the first category sets.* Proceedings of the 12th Winter School on Abstract Analysis Srni (Bohemian Weald), 15-29 January, 1984, Section of Topology
Supplemento ai Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II-numero 6-1984, 139-147.

[G2] E. Grzegorek *Always of the first category sets (II).* Proceedings of the 12th Winter School on Abstract Analysis Srni (Bohemian Weald), 15-29 January, 1984, Section of Topology
Supplemento ai Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II-numero 10-1985, 43-48.

[Ke] A. S. Kechris *Classical Descriptive Set Theory* Graduate Texts in Mathematics vol. 156, Springer-Verlag 1994.

[Ku] K. Kunen *Set Theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic, vol. 102. North Holland, 1980.

[M] A. Miller *Special Subsets of the Real Line.* Handbook of Set-Theoretical Topology (K. Kunen and J. E Vaughan, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984.

[NW] A. Nowik, T. Weiss *Not every Q-set is perfectly meager in the transitive sense.* Proceedings of the American Mathematical Society.

[NSW] A. Nowik, M. Scheepers, T. Weiss *The algebraic sum of sets of real numbers with strong measure zero sets.* Journal of Symbolic Logic, 63(1):301-324, March 1998.

[P] J. Pawlikowski *Every Sierpiński set is strongly meager.* Arch. Math. Logic, 35(1996) no.5-6, p. 281-285.

[Z] P. Zakrzewski *Universally Meager Sets.* Proceedings of the American Mathematical Society.