Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Marcin Kysiak

WŁASNOŚCI IDEAŁÓW MIARY LEBESGUE'A I KATEGORII BAIRE'A

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
dr. hab. Piotra Zakrzewskiego, prof. UW.

Warszawa, 2004.

Podziękowanie

Chciałbym bardzo serdecznie podziękować mojemu promotorowi, prof. Piotrowi Zakrzewskiemu, za ogromne zaangażowanie w opiekę naukową podczas mojej pracy nad doktoratem i pomoc w przygotowaniu tej rozprawy.

Dziękuję również współautorom niektórych zamieszczonych w tej rozprawie wyników, dr. Janowi Kraszewskiemu i dr. Tomaszowi Weissowi, za owocną współpracę i inspirację do podjęcia ciekawych badań.

Marcin Kysiak

Spis treści

1 Wstęp

Badanie własności ideałów miary Lebesgue'a i kategorii Baire'a to już klasyczny, ale ciągle rozwijający się dział teorii mnogości. Łączy on w sobie elementy topologii i teorii miary, używając siły teoriomnogościowego aparatu do uzyskiwania wyników, które bywają interesujące dla szerokiej rzeszy matematyków.

Klasyczne wyniki sięgają prac Lebesgue'a, Borela czy Sierpińskiego. Koncentrują się one głównie na podobieństwach obu tych ideałów, wiele z nich zostało omówionych w książce Oxtoby'ego [31].

Burzliwy rozwój omawianego działu teorii mnogości nastąpił po wprowadzeniu przez P. Cohena metody forcingu. Udostępniła ona aparat pozwalający dowodzić niezależności od teorii mnogości zdań dotyczących ideałów miary i kategorii. Mniej więcej od tego czasu zaczęto też kłaść nacisk na różnice we własnościach tych ideałów. Po przykłady wyników uzyskanych za pomocą metody forcingu, zwłaszcza świadczących o (absolutnych lub niesprzecznych) różnicach pomiędzy tymi ideałami, warto sięgnąć do monografii Bartoszyńskiego–Judaha [3].

W ostatnich latach wiele uwagi poświęca się addytywnym, tzn. odwołującym się do grupowej struktury przestrzeni, własnościom tych ideałów. Aktualnie prowadzone badania dotyczą też różnego rodzaju podideałów ideałów miary i kategorii, często definiowanych właśnie w odniesieniu do addytywnej struktury przestrzeni (np. ideały zbiorów silnie miary zero, addytywnie miary zero, bardzo pierwszej kategorii, addytywnie pierwszej kategorii czy rodzina zbiorów silnie pierwszej kategorii).

Innym ważnym nurtem współczesnych badań jest badanie ideałów posiadających podobne własności do ideałów miary i kategorii. Sporo uwagi poświęca się kwestii, czy ideały miary i kategorii są jedynymi ideałami posiadającymi pewne własności. Z drugiej strony bada się również, czy zachodzą ogólne związki pomiędzy naturalnymi własnościami, które ideały miary i kategorii posiadają.

W niniejszej rozprawie nawiążemy do różnych wątków dotyczących badań ideałów miary i kategorii. W rozdziale 3. zajmiemy się niemierzalnymi sumami algebraicznymi. Wyniki tego rozdziału nawiązują zarówno do klasycznego twierdzenia Sierpińskiego, mówiącego, że istnieją dwa zbiory miary zero takie, że ich suma algebraiczna jest niemierzalna, jak i do współczesnych wyników Ciesielskiego, Fejzić'a i Freilinga z artykułu [12], czy Cichonia, Moraynego, Rałowskiego i Rylla-Nardzewskiego z pracy [11], dotyczących niemierzalnych sum algebraicznych. Ponadto, odpowiadając częściowo na pytanie postawione przez J. Cichonia, pokażemy konstrukcję „asymetrycznego" podzbioru $\mathbb{R}$. Część rezultatów umieszczonych w tym rozdziale znalazła się w pracy [26].

W rozdziale 4. zajmiemy się badaniami różnych ideałów związanych z ideałami miary i kategorii. W szczególności interesować nas będą związki między takimi ideałami, a ideałami (l_0) i (m_0) związanymi z forcingami Lavera i Millera. Wyniki z tego rozdziału znalazły się we wspólnej pracy autora z T. Weissem ([27]).

W rozdziale 5. zaprezentujemy konstrukcję ideału, który ma tzw. własność produktowalności, a nie ma tzw. słabej własności Fubiniego. Konstrukcja takiego ideału stanowi wspólny wynik autora z J. Kraszewskim, zamieszczony w pracy [23]. Wynik ten nawiązuje do omówionego wyżej wątku dotyczącego badań ideałów podobnych do ideałów miary i kategorii. W dowodzie tego twierdzenia posłużymy się pewnymi własnościami ideału kategorii na przestrzeni zwartych podzbiorów zbioru Cantora. Poświęcimy też trochę miejsca pytaniu, czy ideał miary ma analogiczne własności.

Część wyników zamieszczonych w niniejszej rozprawie znalazła się we wspólnych publikacjach autora z innymi matematykami. Twierdzenia stanowiące wkład autora we wspólne publikacje zostały umieszczone w rozprawie wraz z dowodami. Aby umieścić je w odpowiednim kontekście, konieczne jest tu również podanie pozostałych wyników z tych prac, jednak w takim przypadku po dowód odsyłamy do oryginalnego artykułu.

2 Podstawowe fakty, oznaczenia i terminologia

2.1 Oznaczenia

Większość używanych w rozprawie oznaczeń jest standardowa i zgodna z oznaczeniami używanymi w [3].

Dla dowolnego zbioru X rodzinę $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy ideałem, jeżeli jest ona zamknięta na branie podzbiorów i skończonych sum. Zakładać też będziemy, że wszystkie rozpatrywane ideały zawierają singletony oraz są właściwe (tzn. $X \notin \mathcal{I}$). Dla ideału $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ przez $\mathcal{I}^*$ oznaczamy jego filtr dualny, tj. rodzinę $\{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$. Jeżeli ideał jest zamknięty na branie przeliczalnych sum, to nazwiemy go σ-ideałem.

Przez miarę na zbiorze X rozumieć będziemy zawsze σ-addytywną miarę określoną na pewnym σ-ciele podzbiorów X, znikającą na punktach. Miarę nazwiemy borelowską, jeżeli jest określona na σ-ciele borelowskich podzbiorów przestrzeni topologicznej.

Jeżeli μ jest miarą określoną na σ-ciele $\mathcal{A}$ podzbiorów X, to przez miarę zewnętrzną μ^* rozumiemy funkcję określoną wzorem

$$\mu^*(Y) = \inf\{\mu(A) : Y \subseteq A \wedge A \in \mathcal{A}\},$$

dla dowolnego zbioru $Y \subseteq X$.

Dla miary μ określonej na pewnym σ-ciele podzbiorów zbioru X, przez $\mathcal{N}_\mu(X)$ oznaczać będziemy σ-ideał zbiorów miary (zewnętrznej) μ zero. Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, przez $\mathcal{M}(X)$ oznaczamy σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii Baire'a w X. We wszystkich przestrzeniach, w których rozważać będziemy ideał kategorii, będzie on ideałem właściwym.

Będziemy pisać krótko $\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}$, gdy jasne będzie z kontekstu jaką przestrzeń i jaką miarę mamy na myśli. Zgodnie z wprowadzonym wyżej oznaczeniem, przez $\mathcal{N}^*$ oznaczać będziemy rodzinę zbiorów pełnej miary, czyli takich zbiorów, których dopełnienie ma miarę zewnętrzną zero. Podobnie, przez $\mathcal{M}^*$ oznaczamy rodzinę zbiorów rezidualnych, czyli takich, których dopełnienie jest pierwszej kategorii Baire'a. Przez $\mathcal{LM}$ oraz $\mathcal{BP}$ oznaczamy, odpowiednio, σ-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a oraz z własnością Baire'a.

Liczbę naturalną utożsamiamy ze zbiorem liczb naturalnych od niej mniejszych, tzn. $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Symbol ω oznacza zbiór liczb naturalnych. Jest to jednocześnie liczba kardynalna – moc dowolnego zbioru (nieskończonego) przeliczalnego. Przez $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha \ldots$ (gdzie α jest liczbą porządkową) oznaczamy kolejne po ω liczby kardynalne; w szczególności ω_1 to najmniejsza nieprzeliczalna liczba kardynalna. Moc zbioru liczb rzeczywistych, czyli liczbę kardynalną continuum, oznaczamy przez $\mathfrak{c}$.

Dla dowolnego zbioru A oraz liczby kardynalnej κ przez $[A]^\kappa$ oznaczamy rodzinę podzbiorów zbioru A mocy κ. Przez $A^{<\omega}$ oznaczamy zbiór skończonych ciągów o wyrazach z A. Dla $s \in A^{<\omega}$ oraz $a \in A$, przez $|s|$ oznaczamy długość ciągu s, a przez $s^\frown a$ ciąg o długości $|s|+1$ powstający z s przez dołączenie na końcu elementu a.

Wszystkie rozpatrywane przez nas grupy będą grupami przemiennymi, stosować będziemy więc notację addytywną dla oznaczenia działania grupowego. Jeżeli G jest grupą przemienną, $t \in G$ oraz $A, B \subseteq G$, to przez $t + A$ i $A + B$ oznaczamy odpowiednio zbiory $\{t + a : a \in A\}$ oraz $\{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zbiór $A + B$ nazywamy sumą algebraiczną zbiorów A, B.

Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów pewnej grupy przemiennej G jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia (lub krótko: niezmienniczy), gdy dla dowolnego $A \in \mathcal{I}$ oraz $t \in G$ mamy $t + A \in \mathcal{I}$.

2.2 Podstawowe przestrzenie

Przestrzenią polską nazywać będziemy przestrzeń topologiczną ośrodkową i metryzowalną w sposób zupełny. Niepusty podzbiór P przestrzeni polskiej X nazwiemy zbiorem doskonałym, jeżeli P jest domknięty w X i nie ma punktów izolowanych. Przez $Perf(X)$ oznaczać będziemy rodzinę doskonałych podzbiorów przestrzeni X. Będziemy pisać krótko $Perf$, gdy jasne będzie z kontekstu, jaką przestrzeń polską mamy na myśli.

Symbol $Bor(X)$ oznaczać będzie σ-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni X. Będziemy pisać krótko Bor, gdy wynikać będzie jednoznacznie z kontekstu, w jakiej przestrzeni X pracujemy.

Jeżeli $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest σ-ideałem, to przez $Bor[\mathcal{I}]$ oznaczać będziemy najmniejsze σ-ciało zawierające $Bor(X)$ oraz $\mathcal{I}$. Łatwo sprawdzić, że

$$Bor[\mathcal{I}] = \{B \triangle I : B \in Bor(X), I \in \mathcal{I}\}.$$

Oprócz prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ z naturalną topologią, strukturą grupy addytywnej i miarą Lebesgue'a, pracować będziemy z innymi przestrzeniami polskimi, które z punktu widzenia badań ideałów miary i kategorii są do $\mathbb{R}$ podobne. Najważniejsze z nich to przestrzeń Cantora i przestrzeń Baire'a.

2.2.1 Przestrzeń Cantora

Jedną z podstawowych przestrzeni będzie dla nas zbiór Cantora 2^ω, czyli zbiór wszystkich nieskończonych ciągów binarnych. Przestrzeń tę można utożsamić z przeliczalnym produktem grupy $\mathbb{Z}_2$, co w naturalny sposób zadaje w niej strukturę grupową. W przestrzeni tej można również wprowadzić miarę probabilistyczną, będącą uzupełnieniem borelowskiej miary produktowej, pochodzącej od przeliczalnego produktu przestrzeni dwupunktowych $\{0,1\}$ (z naturalną miarą probabilistyczną). Łatwo sprawdzić, że miara ta jest niezmiennicza na przesunięcia. Miarę tę nazywać będziemy również miarą Lebesgue'a. Dla $s \in 2^{<\omega}$ przez $[s]$ oznaczać będziemy zbiór $\{x \in 2^\omega : x \supseteq s\}$. Zbiory postaci $[s]$ (dla $s \in 2^{<\omega}$) tworzą bazę topologii w 2^ω. Pracując w przestrzeni 2^ω, przez $\mathbb{Q}$ oznaczać będziemy zbiór tych elementów 2^ω, które mają skończenie wiele jedynek. Symbole $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ oznaczają ciągi stałe będące elementami 2^ω równe tożsamościowo 0 i, odpowiednio, 1. Czasami będziemy też nieznacznie nadużywać tej notacji, oznaczając w ten sposób ciągi stale równe 0 i 1 określone na podzbiorze zbioru ω.

W przestrzeni Cantora ideały $\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}$ mają kombinatoryczne charakteryzacje przydatne w badaniu ich własności. Ponieważ będziemy z tych charakteryzacji kilkakrotnie korzystać, przypomnimy je w tym miejscu.

Stwierdzenie 2.2.1 (Bartoszyński, [3], tw. 2.2.4). *Zbiór $F \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki podział $\{I_n : n \in \omega\}$ zbioru ω na kolejne skończone przedziały i taki element $z_F \in 2^\omega$, że*

$$F \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \in \omega \;\; x \restriction I_n \neq z_F \restriction I_n\}.$$

Definicja 2.2.2. Powiemy, że zbiór $H \subseteq 2^\omega$ jest mały w sensie Bartoszyńskiego, gdy

$$H \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \in \omega \ \ x \restriction I_n \in J_n\}$$

dla pewnego podziału $\{I_n : n \in \omega\}$ zbioru ω na kolejne skończone przedziały i pewnej rodziny zbiorów $J_n \subseteq 2^{I_n}$ o tej własności, że $\sum_{n\in\omega} \frac{|J_n|}{2^{|I_n|}} < \infty$.

Stwierdzenie 2.2.3 (Bartoszyński, [3], tw. 2.5.7). *Zbiór $N \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy N jest sumą dwóch zbiorów małych w sensie Bartoszyńskiego. Dokładniej, dla każdego zbioru $N \in \mathcal{N}(2^\omega)$ istnieją ciągi rosnące ciągi $\langle n_k, m_k : k \in \omega\rangle$ liczb naturalnych i zbiory $I_k \subseteq 2^{[n_k,n_{k+1})}$, $J_k \subseteq 2^{[m_k,m_{k+1})}$ o tej własności, że $\sum_{k\in\omega} |I_k| \cdot 2^{-(n_{k+1}-n_k)}$, $\sum_{k\in\omega} |J_k| \cdot 2^{-(m_{k+1}-m_k)} < +\infty$ oraz*

$$N \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty k \ \ x \restriction [n_k, n_{k+1}) \in I_k\} \cup \{x \in 2^\omega : \exists^\infty k \ \ x \restriction [m_k, m_{k+1}) \in J_k\}.$$

Ponadto można założyć, że $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$ dla dowolnego $k \in \omega$.

2.2.2 Przestrzeń Baire'a

Ważna dla nas będzie przestrzeń Baire'a ω^ω złożona z nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych. Dla $s \in \omega^{<\omega}$ przez $[s]$ oznaczać będziemy zbiór $\{x \in \omega^\omega : x \supseteq s\}$. Podobnie jak w 2^ω, zbiory te tworzą bazę topologii w ω^ω. Przestrzeń ω^ω jest homeomorficzna zarówno ze zbiorem liczb rzeczywistych niewymiernych, jak i z $2^\omega \setminus \mathbb{Q}$ (wynika to łatwo z twierdzenia Aleksandrowa–Urysohna, patrz [20], tw. 7.7.).

Dla $f, g \in \omega^\omega$ piszemy $f \leqslant^* g$ i mówimy, że f dominuje g, gdy dla prawie wszystkich $n \in \omega$ mamy $f(n) \leqslant g(n)$. Podobnie dla zbioru $A \subseteq \omega^\omega$ i funkcji $g \in \omega^\omega$ mówimy, że g dominuje A (co oznaczamy przez $A \leqslant^* g$), gdy

$\forall f \in A\ \ f \leqslant^* g$. Powiemy również, że zbiór $A \subseteq \omega^\omega$ jest zdominowany (lub σ-ograniczony), gdy istnieje funkcja $g \in \omega^\omega$ taka, że $A \leqslant^* g$.

2.2.3 Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych

Elementami hiperprzestrzeni $K(X)$, dla dowolnej przestrzeni polskiej X, są zwarte podzbiory X. W zbiorze $K(X)$ wprowadzamy topologię Vietorisa, której zbiory bazowe są postaci

$$\{P \in K(X) : P \subseteq \bigcup_{i \leqslant n} U_i \ \ \wedge \ \ \forall i \leqslant n\ \ U_i \cap P \neq \emptyset\},$$

dla pewnego ciągu $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle$ otwartych bazowych podzbiorów przestrzeni X.

Wiadomo, że dla dowolnej przestrzeni polskiej X przestrzeń $K(X)$ jest przestrzenią polską, ponadto $K(X)$ jest zwarta, o ile X jest przestrzenią zwartą. Można pokazać, że przestrzeń $K(2^\omega)$ jest homeomorficzna z 2^ω.

2.3 Drzewa

Jeżeli A jest dowolnym zbiorem, to drzewem na A nazywamy dowolny podzbiór $T \subseteq A^{<\omega}$ zamknięty na obcięcia, tzn. spełniający warunek

$$\forall s \in T\ \ \forall n \leqslant |s|\ \ s \restriction n \in T.$$

Dla drzewa $T \subseteq A^{<\omega}$ określamy jego zbiór gałęzi

$$[T] = \{x \in A^\omega : \forall n\ \ x \restriction n \in T\}.$$

O ile nie zaznaczymy inaczej, zakładamy, że wszelkie rozpatrywane drzewa są „dobrze przycięte", tzn. każdy ich element ma właściwe rozszerzenie należące do drzewa. Wyjątkiem od tej reguły będą drzewa ufundowane, tzn. takie, w których nie ma nieskończonych malejących ciągów elementów.

Jeżeli na zbiorze A zadamy topologię dyskretną (co będzie miało miejsce w najważniejszych dla nas przypadkach, czyli $A = \{0, 1\}$ lub $A = \omega$), to dla dowolnego drzewa T na A zbiór $[T]$ jest domknięty w A^ω; ponadto każdy zbiór domknięty w A^ω jest tej postaci (zobacz [20], tw. 2.4).

Na każdym drzewie wprowadzamy naturalny porządek odwrotnej inkluzji. W szczególności ciąg pusty jest największym elementem każdego drzewa, a o ciągu s' przedłużającym ciąg s mówimy, że leży poniżej ciągu s.

Drzewo $T \subseteq \omega^{<\omega}$ nazwiemy

- drzewem doskonałym, jeżeli

$$\forall s \in T \;\; \exists t \in T \;\; \Big(t \supseteq s \,\wedge\, |\{n \in \omega : t^\frown n \in T\}| > 1\Big),$$

- drzewem Lavera, jeżeli

$$\exists s \in T \;\; \forall t \in T \;\; \Big(t \subseteq s \,\vee\, |\{n \in \omega : t^\frown n \in T\}| = \omega\Big),$$

- drzewem Millera (lub drzewem superdoskonałym), jeżeli

$$\forall s \in T \;\; \exists t \in T \;\; \Big(t \supseteq s \,\wedge\, |\{n \in \omega : t^\frown n \in T\}| = \omega\Big).$$

Innymi słowy drzewo jest doskonałe, jeżeli rozgałęzia się poniżej każdego elementu, jest drzewem Millera, jeżeli poniżej każdego elementu rozgałęzia się w pewnym punkcie na nieskończenie wiele następników, oraz jest drzewem Lavera, jeżeli poniżej pewnego elementu rozgałęzia się w każdym punkcie na nieskończenie wiele następników.

Terminu drzewo doskonałe będziemy również używać w odniesieniu do drzew na zbiorze $\{0,1\}$ spełniających analogiczny warunek. Odnotujmy, że zbiór $P \subseteq 2^\omega$ jest doskonały wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje niepuste drzewo doskonałe $T \subseteq 2^{<\omega}$ takie, że $P = [T]$; analogiczny warunek spełniony jest w przestrzeni ω^ω.

Dla drzewa $T \subseteq A^{<\omega}$ określamy jego zbiór rozgałęzień

$$\mathrm{Split}(T) = \{t \in T : |\{n \in \omega : t^\frown n \in T\}| > 1\}.$$

Ponadto, dla $m \in \omega$ definiujemy

$$\mathrm{Split}^m(T) = \{t \in \mathrm{Split}(T) : |\{n < |t| : t \restriction n \in \mathrm{Split}(T)\}| = m\}.$$

Przez $\mathrm{stem}(T)$ będziemy oznaczać jedyny element zbioru $\mathrm{Split}^0(T)$, czyli miejsce pierwszego rozgałęzienia drzewa T.

2.4 Forcing

W pracy opieramy się na podstawowych faktach dotyczących metody forcingu, opisanych na przykład w [24], jak również na elementarnych własnościach kodów borelowskich opisanych w [18].

Jako podstawową aksjomatykę teorii mnogości przyjmujemy teorię ZFC (patrz [24]). Rozpatrywać będziemy wyłącznie przechodnie modele (fragmentów) teorii ZFC. Stosując powszechnie przyjętą konwencję, będziemy pisać $M \models \mathrm{ZFC}^*$ dla zaznaczenia faktu, że M (czy dokładniej $\langle M, \in\rangle$) spełnia odpowiednio duży skończony fragment teorii ZFC.

Przyjmujemy, że dla warunków $p, q \in P$ pojęcia forcingu $\langle P, \leqslant\rangle$ mamy $p \leqslant q$, gdy warunek p jest silniejszy od warunku q.

Jeżeli $M \models \mathrm{ZFC}^*$, a B jest zbiorem borelowskim, to pisząc $B \in M$ mamy na myśli, że kod zbioru B należy do M. W powyższej sytuacji przez B^M oznaczamy zbiór tych elementów zbioru B, które należą do M.

Szczególnie interesujące będą dla nas następujące pojęcia forcingu:

- forcing Cohena $\mathbb{C} = Bor/\mathcal{M}$,
- forcing Solovaya $\mathbb{B} = Bor/\mathcal{N}$,
- forcing Sacksa $\mathbb{S}$, którego warunkami są drzewa doskonałe w $2^{<\omega}$, a relacją porządku – relacja inkluzji,
- forcing Lavera $\mathbb{L}$, którego warunkami są drzewa Lavera w $\omega^{<\omega}$, a relacją porządku – relacja inkluzji,
- forcing Millera $\mathbb{M}$, którego warunkami są drzewa Millera w $\omega^{<\omega}$, a relacją porządku – relacja inkluzji.

Przypomnijmy, że wymienione wyżej pojęcia forcingu mogą mieć różne reprezentacje. W szczególności o forcingu $\mathbb{S}$ można również myśleć jako o rodzinie drzew doskonałych w przestrzeni $\omega^{<\omega}$, rodzinie podzbiorów doskonałych przestrzeni 2^ω czy podzbiorów doskonałych przestrzeni ω^ω.

2.5 Małe zbiory

W rozdziale 4. zajmiemy się własnościami pewnych rodzin małych podzbiorów przestrzeni 2^ω. Sformułujemy tu definicje niektórych takich klas, którymi będziemy się zajmować.

Definicja 2.5.1. Podzbiór X dowolnej przestrzeni metrycznej nazywamy zbiorem silnie miary zero ($X \in \mathbf{SMZ}$), jeżeli dla dowolnego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ istnieje ciąg zbiorów otwartych $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ takich, że $\delta(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ dla każdego $n \in \omega$ oraz $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$.

Definicja 2.5.2. Podzbiór X przestrzeni polskiej Y nazywamy zbiorem uniwersalnie miary zero ($X \in \mathbf{UMZ}$), jeżeli dla każdej borelowskiej miary probabilistycznej μ na Y znikającej na punktach mamy $\mu^*(X) = 0$.

Łatwo widać, że zarówno rodzina **SMZ** jak i rodzina **UMZ** jest σ-ideałem podzbiorów przestrzeni X.

Definicja 2.5.3. Zbiór $X \subseteq 2^\omega$ nazywamy zbiorem silnie pierwszej kategorii ($X \in \mathbf{SFC}$), jeżeli dla dowolnego zbioru $G \subseteq 2^\omega$ pełnej miary istnieje element $t \in 2^\omega$ taki, że $X \subseteq t + G$.

Galvin, Mycielski i Solovay wykazali w pracy [17], że zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem silnie miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru rezidualnego $G \subseteq 2^\omega$ istnieje liczba $t \in 2^\omega$ taka, że $X \subseteq t + G$. Rodzina zbiorów silnie pierwszej kategorii powstaje przez dualizację tej charakteryzacji, stanowi zatem naturalny odpowiednik rodziny **SMZ**. Bartoszyński i Shelah pokazali jednak w pracy [4], że przy założeniu CH rodzina **SFC** nie jest zamknięta na sumy, tzn. istnieją dwa zbiory $X, Y \in \mathbf{SFC}$ takie, że $X \cup Y \notin \mathbf{SFC}$.

W swojej pracy magisterskiej [25] autor pokazał, że zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem silnie miary zero, gdy dla dowolnego zbioru rezidualnego $G \subseteq 2^\omega$ istnieje zbiór przeliczalny $T \subseteq 2^\omega$ taki, że $X \subseteq T + G$. Poprzez dualizację tej charakteryzacji otrzymujemy inną klasę zbiorów, również będącą naturalnym odpowiednikiem zbiorów silnie miary zero, ale zamkniętą nawet na przeliczalne sumy. Poza tą różnicą, klasa ta wykazuje wiele podobieństw do klasy zbiorów silnie pierwszej kategorii (zob. [25]).

Definicja 2.5.4. Zbiór $X \subseteq 2^\omega$ nazywamy zbiorem bardzo pierwszej kategorii (ang. *very meager*, $X \in \mathbf{VFC}$) jeżeli dla dowolnego zbioru $G \subseteq 2^\omega$ pełnej miary istnieje zbiór przeliczalny $T \subseteq 2^\omega$ taki, że $X \subseteq T + G$.

Zbiory silnie- i bardzo pierwszej kategorii można oczywiście rozpatrywać w innych grupach niż 2^ω. W szczególności ich definicje mają sens w przestrzeni $[0, 1]$ (z dodawaniem modulo 1) i w $\mathbb{R}$.

Również rodzina zbiorów uniwersalnie miary zero ma swoje odpowiedniki dla kategorii.

Definicja 2.5.5. Podzbiór X przestrzeni polskiej Y nazywamy zbiorem zawsze pierwszej kategorii ($X \in \mathbf{AFC}$), jeżeli dla dowolnego zbioru doskonałego P zbiór $X \cap P$ jest pierwszej kategorii w przestrzeni P (z topologią podprzestrzeni przestrzeni Y).

Definicja 2.5.6. Podzbiór X przestrzeni polskiej Y nazywamy zbiorem uniwersalnie pierwszej kategorii ($X \in \mathbf{UFC}$), gdy dla dowolnej doskonałej przestrzeni polskiej Y' i borelowskiego izomorfizmu $\phi : Y \to Y'$ zbiór $\phi[X]$ jest pierwszej kategorii w Y'.

Wiadomo, że w przestrzeni 2^ω zachodzą następujące związki pomiędzy wymienionymi wyżej klasami zbiorów:

- $\mathbf{SMZ} \subsetneq \mathbf{UMZ} \subsetneq \mathcal{N}$,
- $\mathbf{SFC} \subseteq \mathbf{VFC} \subsetneq \mathbf{UFC} \subseteq \mathbf{AFC} \subsetneq \mathcal{M}$.

Definicja 2.5.7. Nieprzeliczalny zbiór $X \subseteq 2^\omega$ nazwiemy

- zbiorem Łuzina, jeżeli $\forall F \in \mathcal{M} \ \ |F \cap X| \leqslant \omega$,
- zbiorem Sierpińskiego, jeżeli $\forall H \in \mathcal{N} \ \ |H \cap X| \leqslant \omega$.

Wiadomo, że każdy zbiór Sierpińskiego jest zbiorem silnie pierwszej kategorii (zob. [32]), a każdy zbiór Łuzina – zbiorem silnie miary zero (zob. [3], lemat 8.2.2.).

3 Własności addytywne

3.1 Niemierzalne sumy algebraiczne

W tej części rozprawy przedstawimy wyniki dotyczące niemierzalności zbiorów mających postać sumy algebraicznej.

Wiele konstrukcji zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a korzysta ze struktury addytywnej, jaką posiada przestrzeń. Warto tu wspomnieć choćby klasyczny przykład Vitaliego w $\mathbb{R}$, czyli selektor z warstw podgrupy $\mathbb{Q}$. Innym przykładem zbioru niemierzalnego związanego z addytywną strukturą przestrzeni jest (w przestrzeni 2^ω) dowolna podgrupa gęsta indeksu 2. Przykładem takiej podgrupy jest np. każdy niegłówny ideał maksymalny na ω (traktowany jako podzbiór 2^ω poprzez utożsamienie podzbiorów ω z ich funkcjami charakterystycznymi).

Naturalnym pytaniem jest, czy zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a są zamknięte na operację sumy algebraicznej. Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił już Sierpiński dowodząc następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.1 (Sierpiński, [35]). *Istnieją takie dwa zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ miary Lebesgue'a zero, że zbiór $X + Y$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Konstrukcję Sierpińskiego łatwo zmodyfikować tak, aby otrzymać analogiczny przykład dla kategorii Baire'a. Ponadto niewielka modyfikacja dowodu pozwala na podanie przykładu takiego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$ miary Lebesgue'a zero, że zbiór $X + X$ jest niemierzalny. Przykład analogiczny do przykładu Sierpińskiego można również skonstruować w przestrzeni 2^ω.

Uogólniając wynik Sierpińskiego, Kharazishvili udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.2 (Kharazishvili, [21]). *Niech $\mathcal{S}$ będzie niezmienniczym σ-ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$, a $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$ – niezmienniczym σ-ideałem takim, że algebra ilorazowa $\mathcal{S}/\mathcal{I}$ ma własność c.c.c. Wtedy następujące warunki są równoważne*

- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X \in \mathcal{I}\ X + X \notin \mathcal{S}$.

Podobne twierdzenie w odniesieniu do ideałów o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych sformułowali Cichoń i Jasiński w pracy [10].

Twierdzenie 3.1.3 (Cichoń–Jasiński, [10]). *Niech $\mathcal{I}$ będzie niezmienniczym σ-ideałem podzbiorów $\mathbb{R}$ o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin Bor[\mathcal{I}]$.

Ponieważ nietrudno przekonać się, że istnieje taki zbiór miary zero $X \subseteq \mathbb{R}$, że $X + X = \mathbb{R}$, wspomniany wyżej wynik Sierpińskiego jest prostym wnioskiem z powyższego twierdzenia.

Zarówno w twierdzeniu Sierpińskiego, jak i w twierdzeniu Cichonia i Jasińskiego konstruuje się zbiory X', Y' należące do pewnego ideału, takie, że zbiór $X' + Y'$ jest niemierzalny (tzn. nie należy do pewnego σ-ciała), zakładając, że istnieją takie zbiory X, Y w tym ideale, że zbiór $X + Y$ to tego ideału nie należy. Warto podkreślić, że ani w konstrukcji Sierpińskiego, ani w konstrukcji Cichonia i Jasińskiego otrzymane zbiory X', Y' nie muszą być podzbiorami odpowiednio zbiorów X i Y. Nasuwa się więc naturalne pytanie, czy można te twierdzenia wzmocnić tak, aby otrzymać takie inkluzje.

W kontekście miary Lebesgue'a częściową pozytywną odpowiedzią na to pytanie jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.4 (Ciesielski–Fejzić–Freiling, [12]). *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $A + A \notin \mathcal{N}$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X$ jest zbiorem niemierzalnym.*

W rozdziale tym podamy istotnie prostszy dowód powyższego twierdzenia, pokażemy też, że dla dowolnych zbiorów A, B takich, że $A + B \notin \mathcal{N}$ istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ jest zbiorem niemierzalnym. Dokładnie tą samą techniką wykażemy analogiczny fakt dla ideału kategorii.

W dalszej części rozdziału rozwiniemy zastosowaną technikę tak, aby analogiczne fakty udowodnić też dla szerokiej klasy σ-ideałów i σ-ciał, w szczególności dla σ-ideału zbiorów Marczewskiego zero i σ-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Marczewskiego, a także dla σ-ideałów $\mathcal{I}$ o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych i σ-ciał postaci $Bor[\mathcal{I}]$. W szczególności udowodnimy twierdzenie wzmacniające wyżej wymienione twierdzenie Cichonia i Jasińskiego.

Wcześniej jednak rozważymy naturalne pytanie, czy w twierdzeniu Ciesielskiego, Fejzić'a i Freilinga można żądać od skonstruowanego zbioru X, żeby miał miarę zero. Przedstawimy prosty kontrprzykład na tę hipotezę w pełnej ogólności, natomiast wykażemy, że istotnie można taki zbiór skonstruować przy dodatkowym założeniu mierzalności wyjściowego zbioru A. Analogiczny fakt udowodnimy również dla kategorii Baire'a.

Na koniec tego rozdziału, nawiązując do przykładu Erdősa–Stone'a zbiorów borelowskich $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takich, że $A + B$ nie jest zbiorem borelowskim, przedyskutujemy możliwość udowodnienia podobnych twierdzeń dla σ-ciała zbiorów borelowskich. W szczególności wykażemy, że istnieje zbiór borelowski P taki, że dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq P$ zbiór $A+B$ jest borelowski.

3.1.1 Miara i kategoria

Rozpocznijmy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.5. *Jeżeli zbiór $A \subseteq 2^\omega$ ma tę własność, że $A + A$ nie jest zbiorem miary zero, to istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Dowód. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że zbiór $A + A$ jest mierzalny, gdyż jeżeli $A + A$ jest niemierzalny, przyjmujemy $X = A$.

Niech $F \subseteq 2^\omega$ będzie niegłównym ultrafiltrem na ω a $I = F^*$ – ideałem dualnym, czyli rodziną $\{\omega \setminus Y : Y \in I\}$. Wiadomo, że zbiory F oraz I są całkowicie niemierzalne (tzn. mają miarę wewnętrzną równą 0, a zewnętrzną równą 1). Ponieważ przecięcie zbioru mierzalnego ze zbiorem całkowicie niemierzalnym jest niemierzalne, $I \cap (A + A)$ jest zbiorem niemierzalnym.

Ponieważ dodawanie w przestrzeni 2^ω odpowiada operacji różnicy symetrycznej w $\mathcal{P}(\omega)$, widzimy, że $I+I = F+F = I$ oraz $I+F = F$. Wynika stąd, że $A \not\subseteq I$ i $A \not\subseteq F$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $A + A \subseteq I$, co przeczyłoby temu, że I ma miarę wewnętrzną 0.

Przyjmijmy $X_0 = A \cap I$ oraz $X_1 = A \cap F$. Mamy

$$(X_0 + X_0) \cup (X_1 + X_1) = (A + A) \cap I;$$

z dokonanej już obserwacji wiemy, że jest to zbiór niemierzalny. Zatem jeden ze zbiorów $X_0 + X_0$ i $X_1 + X_1$ musi być niemierzalny. □

W dokładnie taki sam sposób można dowieść analogicznego twierdzenia dla kategorii.

Twierdzenie 3.1.6. *Jeżeli zbiór $A \subseteq 2^\omega$ ma tę własność, że $A + A$ nie jest pierwszej kategorii, to istnieje $X \subseteq A$ taki, że $X + X$ nie ma własności Baire'a.* □

Uwaga 3.1.7. Twierdzenie 3.1.5 udowodnili - niezależnie od autora niniejszej rozprawy - Ciesielski, Fejzić i Freiling w pracy [12]. Ich dowód odnosi się co prawda do przestrzeni $\mathbb{R}$, ale analogiczny dowód można przeprowadzić w 2^ω. Dowód podany powyżej jest znacznie prostszy od dowodu z [12], w dalszej części pracy zaprezentujemy również jego modyfikację dla przestrzeni $\mathbb{R}$.

Niemal ten sam argument można zastosować, gdy mamy do czynienia z sumą algebraiczną dwóch różnych zbiorów.

Twierdzenie 3.1.8. *Załóżmy, że zbiory $A, B \subseteq 2^\omega$ mają tę własność, że $A + B$ nie jest zbiorem miary zero. Wtedy istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Dowód. Tak jak poprzednio, możemy założyć, że zbiór $A + B$ jest mierzalny.

Weźmy ultrafiltr F oraz ideał I takie jak w dowodzie twierdzenia 3.1.5 i zdefiniujmy $X_0 = A \cap I$, $X_1 = A \cap F$, $Y_0 = B \cap I$ oraz $Y_1 = B \cap F$. Mamy:

$$A + B = (X_0 + Y_0) \cup (X_0 + Y_1) \cup (X_1 + Y_0) \cup (X_1 + Y_1).$$

Ponieważ $(A+B)\cap I = (X_0+Y_0)\cup(X_1\cup Y_1)$, zatem jeden ze zbiorów (X_0+Y_0) i (X_1+Y_1) jest niemierzalny. □

Możemy też udowodnić analogiczne twierdzenie dla kategorii.

Twierdzenie 3.1.9. *Jeżeli zbiory $A, B \subseteq 2^\omega$ mają tę własność, że $A+B$ jest drugiej kategorii, to istnieją zbiory $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ takie, że zbiór $X+Y$ nie ma własności Baire'a.* □

Przedstawimy teraz analogiczne rozumowania dla przestrzeni $\mathbb{R}$. Zauważmy najpierw, że kluczowym punktem powyższych dowodów było rozważenie własności niegłównego ultrafiltru na ω traktowanego jako podzbiór 2^ω. Nietrudno przekonać się, że skorzystaliśmy tak naprawdę z tego, że niegłówny ideał maksymalny (czyli dopełnienie niegłównego ultrafiltru) jest gęstą podgrupą indeksu 2 (to znaczy posiadającą dokładnie dwie warstwy) grupy 2^ω. Zauważmy, że każda taka podgrupa, podobnie jak ultrafiltr, jest całkowicie niemierzalna, tzn. ma miarę wewnętrzną równą zero a zewnętrzną równą 1. Obserwacja ta sugeruje próbę udowodnienia analogicznych faktów w $\mathbb{R}$ poprzez rozważenie stosownej podgrupy. Co prawda każda właściwa podgrupa addytywnej grupy $\mathbb{R}$ ma nieskończony indeks, ale powyższe rozumowania można zmodyfikować tak, aby objąć również ten przypadek.

Stwierdzenie 3.1.10. *Załóżmy, że $G \subseteq \mathbb{R}$ jest podgrupą $\mathbb{R}$ zawierającą zbiór $\mathbb{Q}$ taką, że $|\mathbb{R}/G| = \omega$. Niech $\mathcal{A}$ będzie właściwym niepustym podzbiorem grupy ilorazowej $\mathbb{R}/G$. Wtedy $\bigcup\mathcal{A}$ jest zbiorem całkowicie niemierzalnym.*

Dowód. Ponieważ $\mathbb{Q}\subseteq G$, zbiór $\bigcup\mathcal{A}$ jest $\mathbb{Q}$-niezmienniczy (czyli niezmienniczy na przesunięcia wymierne), zatem jest zbiorem miary wewnętrznej zero lub pełnej, podobnie rzecz ma się z jego miarą zewnętrzną. Gdyby zbiór $\bigcup\mathcal{A}$ był miary zewnętrznej zero, każda z warstw G byłaby zbiorem miary zero, zatem z przeliczalności indeksu G mielibyśmy $\mathbb{R} \in \mathcal{N}$. Z kolei gdyby zbiór $\bigcup\mathcal{A}$ miał miarę wewnętrzną pełną, to miara zewnętrzna warstwy nie należącej do $\mathcal{A}$ byłaby równa zero, a co za tym idzie wszystkie warstwy miałyby miarę zero, co znów dowodziłoby, że $\mathbb{R} \in \mathcal{N}$. Zatem zbiór $\bigcup\mathcal{A}$ ma miarę zewnętrzną pełną, a wewnętrzną równą zero. □

Wniosek 3.1.11. *Jeżeli $G \subseteq \mathbb{R}$ jest podgrupą o własnościach jak w powyższym twierdzeniu a zbiór X nie przecina wszystkich warstw podgrupy G, to X jest niemierzalny lub $X \in \mathcal{N}$.* □

Odnotujmy, że grupa o własnościach wymienionych w założeniach powyższego stwierdzenia rzeczywiście istnieje.

Stwierdzenie 3.1.12. *Istnieje grupa $G \subseteq \mathbb{R}$ zawierająca $\mathbb{Q}$ taka, że $|\mathbb{R}/G| = \omega$.*

Dowód. Niech H będzie bazą Hamela (tzn. bazą $\mathbb{R}$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$) taką, że $1, \pi \in H$. Wystarczy zdefiniować G jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$ rozpiętą przez zbiór $H \setminus \{\pi\}$. □

Twierdzenie 3.1.13. *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A+A$ nie jest miary zero, to istnieje $X \subseteq A$ taki, że $X+X$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Dowód. Niech G będzie grupą jak w stwierdzeniu 3.1.12. Ustalmy numerację warstw $\mathbb{R}/G = \{T_n : n \in \omega\}$ i zdefiniujmy $X_n = A \cap T_n$. Ponieważ $A + A = \bigcup_{n,m\in\omega}(X_n + X_m)$, istnieją takie n_0, m_0, że $X_{n_0} + X_{m_0} \notin \mathcal{N}$. Niech $X = X_{n_0} \cup X_{m_0}$, wtedy $X + X \notin \mathcal{N}$. Ale zbiór $X + X$ przecina co najwyżej trzy warstwy G, więc w szczególności z wniosku 3.1.11 wynika, że jest zbiorem niemierzalnym. □

Stosując analogiczną technikę możemy też udowodnić następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.14. *Załóżmy, że zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mają tę własność, że $A + B$ nie jest miary zero. Wtedy istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ jest zbiorem niemierzalnym.* □

Twierdzenie 3.1.15. *Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A - A$ nie jest miary zero, to istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że zbiór $X - X$ jest niemierzalny.* □

Twierdzenie 3.1.16. *Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A + A$ nie jest pierwszej kategorii, to istnieje $X \subseteq A$ taki, że $X + X$ nie ma własności Baire'a.* □

Twierdzenie 3.1.17. *Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A - A$ nie jest pierwszej kategorii, to istnieje $X \subseteq A$ taki, że $X - X$ nie ma własności Baire'a.* □

Twierdzenie 3.1.18. *Jeżeli zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mają tę własność, że $A + B$ jest drugiej kategorii, to istnieją zbiory $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ takie, że zbiór $X + Y$ nie ma własności Baire'a.* □

Odnotujmy też, że powyższa technika da się uogólnić również na sumy algebraiczne długości większej niż dwa.

Twierdzenie 3.1.19. *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A + A + \ldots + A$ nie jest miary zero, to istnieje $X \subseteq A$ taki, że $X + X + \ldots + X$ (gdzie suma jest tej samej długości co w $A + A + \ldots + A$) jest zbiorem niemierzalnym.*

Dowód. Analogiczny do dowodu twierdzenia 3.1.13. □

Podkreślmy również, że powyższe twierdzenie odnoszące się do sum długości większej niż dwa można również udowodnić w przestrzeni 2^ω. Potrzebna jest do tego konstrukcja podgrupy $G \subseteq 2^\omega$, która ma dokładnie ω warstw. Konstrukcję taką nietrudno wykonać podobnie, jak zostało to zrobione w dowodzie stwierdzenia 3.1.12, korzystając z faktu, że przestrzeń 2^ω jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_2$.

W świetle wyniku Sierpińskiego nasuwa się pytanie, czy w powyższych twierdzeniach można żądać od zbiorów X, Y, aby miały miarę zero lub były pierwszej kategorii. Przeczy temu oczywisty kontrprzykład $A = \mathbb{Q}$, $B = 2^\omega$. Innym możliwym kontrprzykładem (przy założeniu CH) dla miary jest zbiór Sierpińskiego A taki, że $A + A = 2^\omega$, a dla kategorii – zbiór Łuzina o tej własności. Konstrukcje takich zbiorów można znaleźć w [3] (tw. 8.2.3 i 8.5.3).

Okazuje się jednak, że od X, Y można żądać, aby miały miarę zero lub były pierwszej kategorii, o ile tylko nałożymy pewne ograniczenia na wyjściowe zbiory A, B. Zaczniemy tym razem od twierdzenia dotyczącego kategorii Baire'a.

Twierdzenie 3.1.20. *Załóżmy, że zbiory $A, B \subseteq 2^\omega$ mają własność Baire'a, ale nie są pierwszej kategorii. Wtedy istnieją zbiory pierwszej kategorii $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ nie ma własności Baire'a.*

Dowód. Skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 3.1.21. *Załóżmy że zbiór $G \subseteq 2^\omega$ jest rezidualny. Wtedy istnieją zbiory pierwszej kategorii $F_1, F_2 \subseteq G$ takie, że $F_1 + F_2 \notin \mathcal{M}$.*

Dowód. Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że

$$G = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ x \restriction I_n = \mathbf{0}\}$$

dla pewnego podziału $\{I_n : n \in \omega\}$ zbioru ω na kolejne skończone przedziały. Istotnie, ze stwierdzenia 2.2.1 łatwo wynika, że dowolny zbiór rezidualny w 2^ω zawiera przesunięcie zbioru tej postaci, zaś zastąpienie zbioru G jego przesunięciem nie ogranicza ogólności rozważań.

Zdefiniujmy $F_0 = \{x \in 2^\omega : \forall n \ x \restriction I_{2n} = \mathbf{0}\}$ oraz $F_1 = \{x \in 2^\omega : \forall n \ x \restriction I_{2n+1} = \mathbf{0}\}$. Nietrudno przekonać się, że oba te zbiory są domknięte brzegowe. Ponadto $F_0 + F_1 = 2^\omega$, gdyż dowolny ciąg $x \in 2^\omega$ można uzyskać jako sumę $x_0 \in F_0$ zdefiniowanego wzorem

$$x_0 \restriction I_n = \begin{cases} x \restriction I_n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \mathbf{0} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

oraz $x_1 \in F_1$ zdefiniowanego wzorem

$$x_1 \restriction I_n = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ x \restriction I_n & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

□

Załóżmy teraz, że zbiory $A, B \notin \mathcal{M}$ mają własność Baire'a. Niech $G = (\mathbb{Q}+A) \cap (\mathbb{Q}+B) \in \mathcal{M}^*$. Z lematu 3.1.21 otrzymujemy zbiory pierwszej kategorii $F_0, F_1 \subseteq G$ takie, że $F_0 + F_1 \notin \mathcal{M}$.

Dla $q \in \mathbb{Q}$ rozważmy $F_0^q = F_0 \cap (q+A) \in \mathcal{M}$ oraz $F_1^q = F_1 \cap (q+B) \in \mathcal{M}$. Ponieważ $F_0 = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} F_0^q$ oraz $F_1 = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} F_1^q$, istnieją takie $p, q \in \mathbb{Q}$, że $F_0^p + F_1^q \notin \mathcal{M}$. Przyjmijmy $X' = p + F_0^p \subseteq A$ oraz $Y' = q + F_1^q \subseteq B$. Oczywiście $X', Y' \in \mathcal{M}$ oraz $X' + Y' \notin \mathcal{M}$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 3.1.9 do zbiorów X', Y', aby otrzymać szukane zbiory X, Y. □

Wniosek 3.1.22. *Jeżeli $A \in \mathcal{BP}$ oraz $A + A \notin \mathcal{M}$ to istnieje taki zbiór pierwszej kategorii $X \subseteq A$, że $X + X \notin \mathcal{BP}$.*

Dowód. Jeżeli $A \in \mathcal{M}$, stosujemy twierdzenie 3.1.6. Jeżeli $A \notin \mathcal{M}$, z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy zbiory pierwszej kategorii $Y_0, Y_1 \subseteq A$ takie, że $Y_0 + Y_1 \notin \mathcal{M}$. Wtedy $X' = Y_0 \cup Y_1 \subseteq A$ jest pierwszej kategorii oraz ma tę własność, że $X' + X' \notin \mathcal{M}$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 3.1.6 do X', aby otrzymać szukany zbiór X. □

Analogiczny fakt jest prawdziwy również na prostej rzeczywistej.

Twierdzenie 3.1.23. *Załóżmy, że zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mają własność Baire'a, ale nie są pierwszej kategorii. Wtedy istnieją zbiory pierwszej kategorii $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ nie ma własności Baire'a.*

Dowód. Udowodnimy następujący odpowiednik lematu 3.1.21.

Lemat 3.1.24. *Załóżmy że zbiór $G \subseteq \mathbb{R}$ jest rezidualny. Wtedy istnieją zbiory pierwszej kategorii $F_1, F_2 \subseteq G$ takie, że $F_1 + F_2 \notin \mathcal{M}$.*

Dowód. W pierwszej kolejności zauważmy, że dowód możemy przeprowadzić w przestrzeni $[0,1]$ z dodawaniem modulo 1. Istotnie, bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $G + \mathbb{Z} = G$. Jeżeli zatem znajdziemy zbiory $F_1', F_2' \subseteq G \cap [0,1]$ takie, że $F_1' + F_2' = [0,1]$ (gdzie $+$ odnosi się do dodawania modulo 1) , to nietrudno przekonać się, że $F_1 = F_1' + \mathbb{Z}$ oraz $F_2 = F_2' + \mathbb{Z}$ są podzbiorami G takimi, że $F_1 + F_2 = \mathbb{R}$. Załóżmy zatem, że $G \in \mathcal{M}^*([0,1])$.

Niech $\varphi : 2^\omega \to [0,1]$ będzie funkcją określoną wzorem

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \omega} \frac{x(n)}{2^{n+1}}.$$

Nietrudno przekonać się, że φ jest ciągła, a jej zbiorem wartości jest zbiór $[0,1]$. Ponadto $\varphi \restriction (2^\omega \setminus \mathbb{Q})$ jest różnowartościowa, a dla $A \subseteq [0,1]$ mamy $A \in \mathcal{M}([0,1]) \longleftrightarrow \varphi^{-1}[A] \in \mathcal{M}(2^\omega)$. Wynika stąd, że bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że $\varphi^{-1}[G] = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ x \restriction I_n = x_G \restriction I_n\}$ dla pewnego podziału $\{I_n : n \in \omega\}$ zbioru ω na kolejne skończone przedziały i pewnego $x_G \in 2^\omega$. Istotnie, $\varphi^{-1}[G] \in \mathcal{M}^*(2^\omega)$, a ze stwierdzenia 2.2.1 wynika, że każdy zbiór rezidualny w 2^ω zawiera zbiór postaci $\{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \ x \restriction I_n = x_G \restriction I_n\}$.

Zdefiniujmy $F_1^* = \{x \in 2^\omega : \forall n \in \omega \ x \restriction I_{2n} = x_G \restriction I_{2n}\}$ oraz $F_2^* = \{x \in 2^\omega : \forall n \in \omega \ x \restriction I_{2n+1} = x_G \restriction I_{2n+1}\}$ oraz połóżmy $F_1 = \varphi[F_1^*]$ i $F_2 = \varphi[F_2^*]$. Oba zbiory $F_1, F_2 \subseteq [0,1]$ są domknięte, brzegowe i zawarte w G. Wykażemy, że $F_1 + F_2 = [0,1]$.

Weźmy dowolną liczbę $z \in [0,1]$, niech $y = z - \varphi(x_G)$. Niech $y^* \in 2^\omega$ będzie rozwinięciem dwójkowym liczby y; jeżeli y ma dwa różne rozwinięcia, wówczas wybieramy to, które jest od pewnego miejsca równe zero. Określmy $x_1^* \in F_1^*$ oraz $x_2^* \in F_2^*$ następująco:

$$x_1^* \restriction I_n = \begin{cases} y^* \restriction I_n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ x_G^* \restriction I_n & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

$$x_2^* \restriction I_n = \begin{cases} x_G^* \restriction I_n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ y^* \restriction I_n & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Wystarczy teraz zauważyć, że

$$\varphi(x_1^*) + \varphi(x_2^*) = \varphi(y^*) + \varphi(x_G) = y + \varphi(x_G) = z.$$

$\square$

Dalsza część dowodu twierdzenia jest analogiczna do dowodu dla przestrzeni 2^ω. □

Będziemy teraz dowodzić analogicznego twierdzenia dla miary. Potrzebne będzie nam następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.25 (Carlson, [9]). *Załóżmy, że $M \models \mathrm{ZFC}^*$, niech $c \in 2^\omega$ będzie liczbą Cohena nad M. Wtedy*

$$M[c] \models \exists D \in \mathcal{N}^* \ \ \forall t \in 2^\omega \ \ |(t+D) \cap (2^\omega)^M| \leqslant \omega.$$

Uwaga 3.1.26. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe w $\mathbb{R}$ (zob. [9]).

Poniższy lemat wydaje się być powszechnie znanym faktem, dla pełności rozumowania zamieszczamy go jednak wraz z dowodem. Odpowiednik tego lematu dla przestrzeni $\mathbb{R}$ wynika z mocniejszych faktów znajdujących się w literaturze, mianowicie z lematu 9 z pracy [15] lub też z lematu 3 z [33]. Wydaje się, że powyższy dowód, dotyczący przestrzeni 2^ω, jest jednak istotnie prostszy.

Lemat 3.1.27. *Dla dowolnego zbioru $N \subseteq 2^\omega$ miary zero istnieje zbiór doskonały $P \subseteq 2^\omega$ taki, że $P + N \in \mathcal{N}$.*

Dowód. Ponieważ zbiór N ma miarę zero, ze stwierdzenia 2.2.3 otrzymujemy rosnące ciągi $\langle n_k, m_k : k \in \omega \rangle$ liczb naturalnych i zbiory $I_k \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$, $J_k \subseteq 2^{[m_k, m_{k+1})}$ o tej własności, że $\sum_{k\in\omega} |I_k| \cdot 2^{-(n_{k+1}-n_k)} < +\infty$, $\sum_{k\in\omega} |J_k| \cdot 2^{-(m_{k+1}-m_k)} < +\infty$ oraz

$$N \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty k \ \ x \restriction [n_k, n_{k+1}) \in I_k \vee x \restriction [m_k, m_{k+1}) \in J_k\}.$$

Ponadto można założyć, że $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$ dla dowolnego $k \in \omega$.

Przyjmijmy $K_k = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$ oraz $P = \prod_{k\in\omega} K_k \subseteq 2^\omega$. Oczywiście $P \in Perf$. Zauważmy, że dla każdego $k \in \omega$ mamy

$$|\{x \restriction [n_k, n_{k+1}) : x \in P\}| \leqslant 2$$

oraz

$$|\{x \restriction [m_k, m_{k+1}) : x \in P\}| \leqslant 4.$$

Wynika stąd, że zbiór $P + N$ można pokryć zbiorami małymi zdefiniowanymi przez te same ciągi $\langle n_k, m_k : k \in \omega\rangle$ oraz zbiory

$$I'_k = \{x \restriction [n_k, n_{k+1}) : x \in P\} + I_k \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})},$$

$$J'_k = \{x \restriction [m_k, m_{k+1}) : x \in P\} + J_k \subseteq 2^{[m_k, m_{k+1})}.$$

Nietrudno sprawdzić, że zbiory te istotnie są małe w sensie Bartoszyńskiego, gdyż $|I'_k| \leqslant 2 \cdot |I_k|$ oraz $|J'_k| \leqslant 4 \cdot |J_k|$. □

Kolejny lemat należy z pewnością do folkloru teoriomnogościowego. Jest on powszechnie znany dla zbiorów borelowskich (zob. np. [18], lemat 42.4), natomiast autor nie spotkał się w literaturze ze sformułowaniem dla zbiorów analitycznych. Ponieważ wydaje się, że dowód dla zbiorów borelowskich z [18] nie daje się prosto zmodyfikować tak, aby objąć przypadek zbiorów analitycznych, prezentujemy ten lemat wraz z dowodem (dowód ten warto porównać z dowodem lematu 42.7 w [18]).

Stwierdzenie 3.1.28. *Niech $N \models \mathrm{ZFC}^*$ będzie przeliczalnym modelem przechodnim oraz niech A będzie zbiorem analitycznym kodowanym w N takim, że $N \models A \in \mathcal{N}^*$. Wtedy $A \in \mathcal{N}^*$.*

Dowód. Niech $D \in \mathcal{N}^*$ będzie zbiorem borelowskim takim, że $N \models D \subseteq A$. Wtedy $\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \Vdash \dot{r} \in D$, gdzie $\dot{r}$ jest nazwą na liczbę losową.

Niech $r \in 2^\omega$ będzie liczbą losową nad N. Wtedy $N[r] \models r \in D$. Ponieważ formuła $D \subseteq A$ jest absolutna dla modeli N oraz $N[r]$, mamy $N[r] \models r \in A$. Ale formuła $x \in A$ jest klasy Σ^1_1, zatem $r \in A$.

Pokazaliśmy zatem, że dowolna liczba losowa nad N należy do A. Dowód lematu kończy prosta obserwacja, że zbiór liczb losowych nad N jest pełnej miary. □

Lemat 3.1.29. *Niech $G \subseteq 2^\omega$ będzie zbiorem pełnej miary. Wtedy istnieją takie zbiory miary zero $F_0, F_1 \subseteq G$, że $F_0 + F_1 \notin \mathcal{N}$.*

Dowód. Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że $G + \mathbb{Q} = G$. Niech $M \models \mathrm{ZFC}^*$ będzie przeliczalnym modelem przechodnim takim, że $G \in M$. Pracując w M i korzystając z lematu 3.1.27 wybierzmy zbiór doskonały $P \in M$ taki, że $M \models P + (2^\omega \setminus G) \in \mathcal{N}$, przy czym możemy założyć, ze $\mathbf{0} \in P$. Przechodząc do dopełnień widzimy, że $M \models \bigcap_{p \in P}(p + G) \in \mathcal{N}^*$, zatem możemy wybrać zbiór borelowski pełnej miary $G' \in M$ taki, że

$$G' \subseteq \bigcap_{p \in P}(p + G).$$

Zauważmy, że (w M) dla dowolnego $p \in P$ mamy $p + G' \subseteq G$. Istotnie, jeżeli $x \in G'$, to $x \in p + G$, zatem $p + x \in p + p + G = G$. Ponadto dla dowolnego $p \in P \cap M$ inkluzja $p + G' \subseteq G$ zachodzi w dowolnym rozszerzeniu generic modelu M.

Niech $c \in 2^\omega$ będzie liczbą Cohena nad M. Korzystając z twierdzenia 3.1.25, znajdujemy zbiór borelowski pełnej miary $D \in M[c]$ taki, że

$\forall t \in 2^\omega \ \ |(t+D) \cap (2^\omega)^M| \leqslant \omega$. Pracując w $M[c]$ zdefiniujmy $F_0 = G \setminus D$ i $F_1 = G \cap M$; oba tak zdefiniowane zbiory mają miarę zero.

Interesuje nas zbiór $F_0 + F_1 = \{t \in 2^\omega : (t+F_0) \cap F_1 \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że

$$\{t \in 2^\omega : |(t+G) \cap F_1| \geqslant \omega_1\} \subseteq \{t \in 2^\omega : (t+F_0) \cap F_1 \neq \emptyset\}.$$

Istotnie, jeżeli $|(t+G) \cap F_1| \geqslant \omega_1$, to $(t+F_0) \cap F_1 = (t+(G \setminus D)) \cap F_1 \neq \emptyset$, gdyż $|(t+D) \cap F_1| \leqslant \omega$, na mocy wyboru zbiorów D i F_1. Wystarczy zatem pokazać, że zbiór $\{t \in 2^\omega : |(t+G) \cap F_1| \geqslant \omega_1\}$ jest pełnej miary.

Ustalmy dowolny $x \in G' \cap M$. Ponieważ zbiór $x + G'$ jest pełnej miary, wystarczy pokazać, że jeżeli $t \in x + G'$, to $|(t+G) \cap F_1| \geqslant \omega_1$. Weźmy zatem dowolne $t \in x + G'$. Zauważmy, że mamy $x \in (t+G') \cap (G' \cap M)$. Z wyboru zbioru G' i zbioru P otrzymujemy, że dla dowolnego $p \in P^M$ zachodzi

$$x + p \in (t+G) \cap (G \cap M) = (t+G) \cap F_1,$$

zatem

$$x + P^M \subseteq (t+G) \cap (G \cap M) = (t+G) \cap F_1.$$

Ponieważ $M[c] \models |P^M| > \omega$, otrzymujemy, że $|(t+G) \cap F_1| \geqslant \omega_1$.

Pokazaliśmy zatem, że $M[c]$ istnieją dwa zbiory miary zero $F_0, F_1 \subseteq G$ takie, że $F_0 + F_1 \in \mathcal{N}^*$. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że F_0, F_1 są borelowskie. Wtedy jednak zbiór $A = F_0 + F_1$ jest analitycznym zbiorem pełnej miary kodowanym w $M[c]$, zatem na mocy lematu 3.1.28, mamy $F_0 + F_1 \in \mathcal{N}^*$. $\square$

Twierdzenie 3.1.30. *Załóżmy, że zbiory $A, B \subseteq 2^\omega$ są mierzalne miary dodatniej. Wtedy istnieją zbiory miary zero $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y$ jest niemierzalny.*

Dowód. Analogiczny do dowodu dla kategorii, z tym, że zamiast z lematu 3.1.21 korzystamy z lematu 3.1.29. □

Analogiczne twierdzenie można również udowodnić w $\mathbb{R}$. W tym celu należy w miejsce lematu 3.1.27 skorzystać z lematu 3 z pracy [33] oraz z twierdzenia 3.1.25 we wspomnianej wersji dla $\mathbb{R}$.

Również analogicznie jak dla kategorii otrzymujemy (zarówno w odniesieniu do 2^ω jak i $\mathbb{R}$) następujący fakt.

Wniosek 3.1.31. *Jeżeli $A \in \mathcal{LM}$ oraz $A + A \notin \mathcal{N}$, to istnieje taki zbiór miary zero $X \subseteq A$, że $X + X \notin \mathcal{LM}$.* □

Dowodowi dla miary warto poświęcić kilka uwag. Przede wszystkim dowód lematu 3.1.29 wydaje się być zaskakująco skomplikowany w porównaniu z dowodem lematu 3.1.21. Autorowi nie udało się podać prostszego, a w szczególności elementarnego (tzn. nie korzystającego z metody forcingu, twierdzeń o absolutności, itp.) dowodu. Odnotujmy jednak, że można podać nieco prostszy dowód, otrzymując jednocześnie nieco mocniejszą tezę, jeżeli w lemacie 3.1.29 założymy, że dopełnienie zbioru G jest małe w sensie Bartoszyńskiego.

Stwierdzenie 3.1.32. *Niech $G \subseteq 2^\omega$ będzie takim zbiorem, że $2^\omega \setminus G$ jest zbiorem małym w sensie Bartoszyńskiego. Wtedy istnieje zbiór $K \subseteq G$ taki, że $K + K = 2^\omega$.*

Dowód. Jeżeli dopełnienie zbioru G jest zbiorem małym, to

$$G \supseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty k \ \ x \restriction [n_k, n_{k+1}) \notin J_k\}$$

dla pewnego rosnącego ciągu $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ liczb naturalnych oraz ciągu zbiorów $J_k \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$ takich, że $\sum_{k\in\omega} |J_k| \cdot 2^{-(n_{k+1}-n_k)} < \infty$. W szczególności istnieje takie $k_0 \in \omega$, że dla $k > k_0$ mamy $|J_k| \cdot 2^{-(n_{k+1}-n_k)} \leqslant \frac{1}{4}$. Możemy zatem dla $k > k_0$ wybrać zbiory $K_k \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$ takie, że $J_k \cap K_k = \emptyset$ oraz $|K_k| \cdot 2^{-(n_{k+1}-n_k)} = \frac{3}{4}$. Wtedy dla $k > k_0$ mamy $K_k + K_k = 2^{[n_k, n_{k+1})}$, zatem jeżeli zdefiniujemy

$$K = \{x \in 2^\omega : \forall k > k_0 \;\; x \restriction [n_k, n_{k+1}) \in K_k\},$$

to otrzymamy $K \subseteq G$ i $K + K = 2^\omega$. Nietrudno też zauważyć, że tak zdefiniowany zbiór K ma miarę zero. □

Odpowiednik lematu 3.1.27 jest również prawdziwy dla kategorii (zarówno w odniesieniu do przestrzeni 2^ω, jak i $\mathbb{R}$).

Stwierdzenie 3.1.33. *Dla dowolnego zbioru $F \in \mathcal{M}$ istnieje zbiór doskonały P taki, że $P + F \in \mathcal{M}$.*

Dowód. Bez ograniczenia ogólności zakładamy, że F jest zbiorem $\mathbb{Q}$-niezmienniczym typu F_σ. Weźmy przeliczalny przechodni model $M \models \mathrm{ZFC}^*$ taki, że $F \in M$. Niech $c \in 2^\omega$ będzie liczbą Cohena nad M. Wiadomo ([3], lemat 3.3.2, patrz też stwierdzenie 5.2.5), że w $M[c]$ istnieje zbiór doskonały P złożony z liczb Cohena nad M.

Zauważmy, że $M[c] \models P + F \in \mathcal{M}$. Istotnie, zbiór $P + F$ jest $\mathbb{Q}$-niezmienniczy, zatem wystarczy pokazać, że $P + F \notin \mathcal{M}^*$. Nietrudno sprawdzić, korzystając z faktu, że P składa się z liczb Cohena nad M, że $(P + F) \cap (2^\omega)^M = \emptyset$. Ponieważ w $M[c]$ mamy $(2^\omega)^M \notin \mathcal{M}$, zatem $P + F \notin \mathcal{M}^*$.

Wystarczy teraz zauważyć, że formuła $P+F \in \mathcal{M}$ jest absolutna dla $M[c]$ i $\mathbf{V}$. Zbiór $P+F$ jest borelowski (nawet typu F_σ), a dla zbiorów borelowskich należenie do ideału $\mathcal{M}$ jest absolutne (zob. [18], lemat 42.4). □

Na zakończenie chcielibyśmy zaznaczyć, że zaprezentowane wyżej dowody twierdzeń 3.1.30 dla miary i 3.1.20 dla kategorii są istotnie różne. Dowód dla kategorii korzysta z eleganckiego opisu kombinatorycznego zbiorów pierwszej kategorii, jakiego zbiory miary zero nie mają (charakteryzacja przez sumy dwóch małych zbiorów wydaje się być tu niewystarczająca). Z kolei w dowodzie dla miary wykorzystaliśmy twierdzenie 3.1.25, które nie jest prawdziwe, jeżeli zamienimy w jego treści miarę na kategorię, a liczbę Cohena na liczbę losową.

3.1.2 Inne algebry

W tej części pracy zajmiemy się uogólnieniem tych spośród dotychczas udowodnionych twierdzeń, które mają analogiczny dowód dla miary i kategorii; mamy tu na myśli twierdzenia 3.1.5, 3.1.6, 3.1.8 i 3.1.9 oraz ich odpowiedniki dla $\mathbb{R}$.

Odnotowaliśmy już, że w dowodach tych twierdzeń dla przestrzeni 2^ω ideał maksymalny (czyli dopełnienie rozważanego ultrafiltru) można zastąpić dowolną podgrupą gęstą indeksu 2. Grupa taka ma dokładnie takie same własności, jeżeli chodzi o mierzalność czy własność Baire'a, natomiast w dowodach nie wykorzystaliśmy wcale zamknięcia ideału na branie podzbiorów. Obserwacji tej użyliśmy już dowodząc odpowiedników wymienionych twierdzeń dla $\mathbb{R}$ poprzez wybranie odpowiedniej podgrupy.

W dalszych dowodach będziemy tak wybierać stosowną podgrupę naszej przestrzeni, aby miała pewne dodatkowe własności. W szczególności okaże się, że żądane przez nas własności nie zawsze mogą być spełnione przez ultrafiltr. W szczególności grupa skonstruowana w lemacie 3.1.36 nie może być dopełnieniem ultrafiltru. Wynika to łatwo z faktu, iż każdy ultrafiltr na ω zawiera podzbiór doskonały.

Przyjmijmy następującą definicję.

Definicja 3.1.34. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem podzbiorów przestrzeni polskiej, a $\mathcal{A}$ – ciałem podzbiorów tej przestrzeni zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Powiemy, że para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ ma własność zbioru doskonałego, jeżeli dla dowolnego zbioru $X \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ istnieje zbiór doskonały $P \subseteq X$.

Twierdzenie 3.1.35. *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem podzbiorów przestrzeni 2^ω, a $\mathcal{A}$ – ciałem podzbiorów tej przestrzeni zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Jeżeli para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ ma własność zbioru doskonałego, to*

- *dla dowolnego zbioru $A \subseteq 2^\omega$ takiego, że $A+A \notin \mathcal{I}$ istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{A}$,*
- *dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq 2^\omega$ takich, że $A + B \notin \mathcal{I}$, istnieją zbiory $X, Y \subseteq A$ takie, że $X + Y \notin \mathcal{A}$.*

W dowodzie skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 3.1.36. *Istnieje podgrupa $G \subseteq 2^\omega$, będąca zbiorem Bernsteina w 2^ω, taka, że $2^\omega = G \cup (\mathbf{1} + G)$.*

Dowód. Ustalmy numerację $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ wszystkich doskonałych podzbiorów przestrzeni 2^ω taką, że $P_0 = 2^\omega$. Ponadto, niech $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie numeracją elementów 2^ω taką, że $x_0 = \mathbf{0}$.

Zauważmy, że jeżeli właściwa podgrupa $G \subseteq 2^\omega$ przecina wszystkie zbiory doskonałe, to jest zbiorem Bernsteina. Istotnie, gdyby istniał zbiór doskonały $P \subseteq G$, to mielibyśmy $G \cap (P + x) = \emptyset$ dla dowolnego $x \notin G$.

Skonstruujemy rosnący ciąg $\langle G_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$ podgrup grupy 2^ω tak, by dla $\alpha < \mathfrak{c}$ spełnione były warunki

1. $\mathbf{1} \notin G_\alpha$
2. $x_\alpha \in G_\alpha$ lub $\mathbf{1} + x_\alpha \in G_\alpha$,
3. $P_\alpha \cap G_\alpha \neq \emptyset$,

Na koniec zdefiniujemy $G = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} G_\alpha$. Zauważmy najpierw, że jeżeli spełnione są warunki 1.–3., to G jest grupą indeksu 2 i jednocześnie zbiorem Bernsteina. Istotnie, warunek 1. implikuje, że G jest właściwą podgrupą grupy 2^ω. Warunek 2., gwarantuje, że każdy punkt albo należy do G, albo do warstwy elementu $\mathbf{1}$. Warunek 3., na mocy dokonanej obserwacji, zapewnia, że G jest zbiorem Bernsteina.

Określmy na początek $G_0 = \mathbb{Q}$. Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy już podgrupy G_ξ dla wszystkich $\xi < \alpha$. W pierwszej kolejności zadbamy o spełnienie drugiego warunku. Może się zdarzyć, że jest on już spełniony, tzn. $x_\alpha \in \bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi$ lub też $\mathbf{1} + x_\alpha \in \bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi$; w takim wypadku kładziemy $G'_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi$. Jeżeli nie, zdefiniujmy G'_α jako $\langle \{x_\alpha\} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi \rangle$, czyli grupę generowaną przez wszystkie elementy zbioru $\bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi$ i punkt x_α. Zauważmy, że przy takiej definicji $\mathbf{1} \notin G'_\alpha$.

Aby zadbać o trzeci warunek, wybierzmy $p_\alpha \in P_\alpha$ tak, by $p_\alpha \notin \mathbf{1} + G'_\alpha$ i zdefiniujmy $G_\alpha = \langle \{p_\alpha\} \cup G'_\alpha \rangle$. Wyboru takiego p_α możemy dokonać, gdyż

$|G'_\alpha| < \mathfrak{c}$. Znów nietrudno zauważyć, że $\mathbf{1} \notin G_\alpha$. Warunek 3. jest również spełniony, o czym świadczy właśnie punkt p_α. □

Dowód twierdzenia 3.1.35. Załóżmy, że para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ ma własność zbioru doskonałego. Niech $A \subseteq 2^\omega$ będzie zbiorem takim, że $A + A \notin \mathcal{I}$, a G – grupą będącą zbiorem Bernsteina taką, że $2^\omega = G \cup (\mathbf{1} + G)$. Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że $A + A \in \mathcal{A}$.

Zauważmy, że zbiór $(A + A) \cap G$ nie należy do $\mathcal{A}$. Istotnie, gdyby zbiór ten należał do $\mathcal{A}$, to ponieważ G nie zawiera zbioru doskonałego, mielibyśmy $(A + A) \cap G \in \mathcal{I}$. Wtedy otrzymalibyśmy, że $(A + A) \cap (\mathbf{1} + G) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$, zatem istniałby zbiór doskonały $P \subseteq (A + A) \cap (\mathbf{1} + G)$. Ale zbiór $\mathbf{1} + G$ jest również zbiorem Bernsteina, zatem nie może zawierać zbioru doskonałego.

Przyjmijmy $X_0 = A \cap G$ oraz $X_1 = A \cap (\mathbf{1} + G) = A \setminus G$. Zauważmy, że

$$(A + A) \cap G = (X_0 + X_0) \cup (X_1 + X_1) \notin \mathcal{A}.$$

Wynika stąd, że przynajmniej jeden ze zbiorów $X_0 + X_0$ oraz $X_1 + X_1$ nie należy do $\mathcal{A}$.

Jeżeli mamy dane zbiory $A, B \subseteq 2^\omega$ takie, że $A + B \notin \mathcal{I}$, to definiujemy $X_0 = A \cap G$, $X_1 = A \cap (\mathbf{1} + G)$, $Y_0 = B \cap G$ oraz $Y_1 = B \cap (\mathbf{1} + G)$. Podobnie jak poprzednio pokazujemy, że $(A + B) \cap G \notin \mathcal{A}$. Mamy jednak

$$(A + A) \cap G = (X_0 + Y_0) \cup (X_1 + Y_1),$$

zatem przynajmniej jeden ze zbiorów $X_0 + Y_0$ oraz $X_1 + Y_1$ nie należy do $\mathcal{A}$. □

Podobne twierdzenie możemy udowodnić w odniesieniu do przestrzeni $\mathbb{R}$. Musimy jednak dodatkowo założyć, że rozważany ideał $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem.

Twierdzenie 3.1.37. *Niech $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$, a $\mathcal{A}$ – σ-ciałem podzbiorów tej przestrzeni zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Jeżeli para $\langle\mathcal{A},\mathcal{I}\rangle$ ma własność zbioru doskonałego, to*

- *dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $A+A \notin \mathcal{I}$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{A}$,*
- *dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $A-A \notin \mathcal{I}$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X - X \notin \mathcal{A}$,*
- *dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takich, że $A + B \notin \mathcal{I}$, istnieją zbiory $X, Y \subseteq A$ takie, że $X + Y \notin \mathcal{A}$.*

W dowodzie skorzystamy z następującego odpowiednika lematu 3.1.36.

Lemat 3.1.38. *Istnieje podgrupa $G \subseteq \mathbb{R}$ taka, że G jest zbiorem Bernsteina w $\mathbb{R}$ i $|\mathbb{R}/G| = \omega$.*

Dowód. Dowód jest w zasadzie analogiczny do dowodu dla przestrzeni 2^ω. Rozpocznijmy znów od prostej obserwacji, że jeżeli właściwa podgrupa $\mathbb{R}$ przecina wszystkie zbiory doskonałe, to jest zbiorem Bernsteina.

Skonstruowana przez nas grupa będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Podobnie jak w dowodzie lematu 3.1.36, ustalamy numerację $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ wszystkich doskonałych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$ taką, że $P_0 = \mathbb{R}$. Ponadto, niech $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie numeracją elementów $\mathbb{R}$ taką, że $x_0 = 0$.

Skonstruujemy rosnący ciąg przestrzeni liniowych $\langle G_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ tak, by spełnić następujące warunki dla $\alpha < \mathfrak{c}$:

1. $\pi \notin G_\alpha$,

2. $x_\alpha \in \mathrm{Lin}(G_\alpha \cup \{\pi\})$,

3. $P_\alpha \cap G_\alpha \neq \emptyset$.

Na koniec położymy $G = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} G_\alpha$. Warunek 1. gwarantuje nam, że skonstruowana podgrupa jest właściwa, a warunek 2. że $\mathbb{R} = \mathrm{Lin}(G \cup \{\pi\})$, zatem w szczególności $|\mathbb{R}/G| = \omega$. Z warunku 3. i z obserwacji poczynionej na początku dowodu wynika natychmiast, że G jest zbiorem Bernsteina.

Na początek przyjmijmy $G_0 = \mathbb{Q}$. Przypuśćmy, że mamy już skonstruowane przestrzenie G_ξ dla wszystkich $\xi < \alpha$. Konstruując G_α skonstruujemy również (pełniącą pomocniczą rolę) podprzestrzeń $G'_\alpha \subseteq G_\alpha$. Jeżeli $x_\alpha \notin \mathrm{Lin}(G_\alpha \cup \{\pi\})$, zdefiniujmy $G'_\alpha = \mathrm{Lin}(\bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi \cup \{x_\alpha\})$, w przeciwnym wypadku przyjmijmy $G'_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} G_\xi$. Łatwo widać, że w ten sposób gwarantujemy sobie spełnienie warunku 2.. Nietrudno też przekonać się, że w każdym z powyższych przypadków $\pi \notin G'_\alpha$. Istotnie, jeżeli $x_\alpha \notin \mathrm{Lin}(G_\alpha \cup \{\pi\})$, to $\pi \notin \mathrm{Lin}(G_\alpha \cup \{x_\alpha\})$, zaś w przeciwnym wypadku $\pi \notin G'_\alpha$ z założenia indukcyjnego.

Następnie wybierzmy dowolny element $p_\alpha \in P_\alpha \setminus \mathrm{Lin}(G'_\alpha \cup \{\pi\})$ i określmy $G_\alpha = \mathrm{Lin}(G'_\alpha \cup \{p_\alpha\})$. Oczywiście gwarantuje nam to spełnienie warunku 3.. Podobnie jak poprzednio możemy też sprawdzić, że $\pi \notin G_\alpha$. □

Dowód twierdzenia 3.1.37. Udowodnimy tylko pierwszy punkt twierdzenia, gdyż dwóch pozostałych dowodzi się bardzo podobnie.

Niech zatem $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem takim, że $A + A \notin \mathcal{I}$, a G – podgrupą $\mathbb{R}$ będącą zbiorem Bernsteina taką, że $|\mathbb{R}/G| = \omega$. Ustalmy numerację warstw grupy G

$$\mathbb{R}/G = \{T_n : n \in \omega\}.$$

Przyjmijmy też $X_n = A \cap T_n$. Ponieważ mamy $A + A = \bigcup_{n,m\in\omega}(X_n + X_m)$, istnieją takie liczby naturalne n, m, że $X_n + X_m \notin \mathcal{I}$. Niech $X = X_n + X_m$; oczywiście $X + X \notin \mathcal{I}$.

Zauważmy teraz, że zbiór $X + X$ przecina co najwyżej trzy warstwy grupy G. Istotnie,

$$X + X \subseteq (T_n + T_n) \cup (T_n + T_m) \cup (T_m + T_m),$$

a każdy ze składników sumy występującej po prawej stronie inkluzji jest warstwą grupy G. Okazuje się jednak, że suma skończenie wielu warstw grupy G nie zawiera zbioru doskonałego; wynika to łatwo z faktu, że każda z warstw grupy G jest zbiorem Bernsteina. Widzimy zatem, że zbiór $X + X$ nie należy do ideału $\mathcal{I}$, ale nie zawiera zbioru doskonałego. Zatem z faktu, iż $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ ma własność zbioru doskonałego wynika, że $X + X \notin \mathcal{A}$. $\square$

Twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.1.37 można sformułować i udowodnić w taki sam sposób w dowolnej przestrzeni polskiej mającej strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$. W szczególności twierdzenie takie jest prawdziwe w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$, czy w ośrodkowych przestrzeniach Banacha.

Uważna analiza dowodu twierdzenia 3.1.37 ujawnia, że nie skorzystaliśmy z założenia, że rodzina $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem. Twierdzenie to można by zatem wzmocnić dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ (przy sformułowaniu własności zbioru doskonałego dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ i ideału $\mathcal{I}$), ale przedstawione powyżej sformułowanie wydaje się być najbardziej interesujące.

W dowodzie twierdzenia 3.1.35 wykorzystaliśmy zamknięcie rodziny $\mathcal{A}$ na skończone sumy. Przeprowadzając dowód bardziej skomplikowaną metodą, można pominąć również i to założenie.

Wniosek 3.1.39. *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem podzbiorów przestrzeni 2^ω, a $\mathcal{A}$ – ciałem podzbiorów tej przestrzeni zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Jeżeli para $\langle\mathcal{A},\mathcal{I}\rangle$ ma własność zbioru doskonałego, to następujące warunki są równoważne.*

- $\exists X \in \mathcal{I}\ X + X \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X \in \mathcal{I}\ X + X \notin \mathcal{A}$,
- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{A}$. □

Wniosek 3.1.40. *Niech $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$, a $\mathcal{A}$ – σ-ciałem podzbiorów tej przestrzeni zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Jeżeli para $\langle\mathcal{A},\mathcal{I}\rangle$ ma własność zbioru doskonałego, to następujące warunki są równoważne.*

- $\exists X \in \mathcal{I}\ X + X \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X \in \mathcal{I}\ X + X \notin \mathcal{A}$,
- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{I}$,
- $\exists X, Y \in \mathcal{I}\ X + Y \notin \mathcal{A}$. □

Przedstawimy teraz szereg zastosowań powyższych ogólnych twierdzeń. Ponieważ udowodniliśmy te twierdzenia dla przestrzeni $\mathbb{R}$ i 2^ω, jak również zauważyliśmy, że analogiczne fakty zachodzą w dość szerokiej klasie przestrzeni, formułując ogólne wnioski nie będziemy za każdym razem precyzować, w jakiej przestrzeni pracujemy, zakładając za każdym razem, że mamy do czynienia z dowolną przestrzenią, dla której prawdziwe są tego typu ogólne twierdzenia.

Przede wszystkim odnotujmy fakt, że pary $\langle \mathcal{LM}, \mathcal{N} \rangle$ oraz $\langle \mathcal{BP}, \mathcal{M} \rangle$ spełniają założenia twierdzeń 3.1.35 i 3.1.37. Jako wnioski z powyższych ogólnych twierdzeń można zatem uzyskać niektóre twierdzenia z rozdziału 3.1.1.

Zajmiemy się teraz zbiorami mierzalnymi w sensie Marczewskiego. Przypomnijmy następującą definicję.

Definicja 3.1.41. Zbiór X jest mierzalny w sensie Marczewskiego ($X \in (s)$), jeżeli dla dowolnego zbioru doskonałego P istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \subseteq X$ lub $Q \cap X = \emptyset$. Zbiór X jest zbiorem Marczewskiego-zero (zbiorem s_0, $X \in (s_0)$), jeżeli dla dowolnego zbioru doskonałego P istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \cap X = \emptyset$.

Oczywiście definicja ta ma sens w dowolnej przestrzeni polskiej. Wiadomo, że zbiory mierzalne w sensie Marczewskiego tworzą σ-ciało, a zbiory s_0 tworzą σ-ideał. Nietrudno też przekonać się, że para $\langle (s), (s_0) \rangle$ ma własność zbioru doskonałego.

W pracy [14] F. Dorais i R. Filipów badali sumy algebraiczne zbiorów s_0. W szczególności podali przykład zbioru $X \in (s_0)$ takiego, że $X + X \notin (s)$. Nawiązując do ich wyniku warto sformułować odnotować następujący wniosek z twierdzeń 3.1.35 i 3.1.37.

Wniosek 3.1.42.

- *Dla dowolnego zbioru A takiego, że $A + A \notin (s_0)$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin (s)$.*

- *Dla dowolnych zbiorów A, B o tej własności, że $A + B \notin (s_0)$, istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y \notin (s)$.* $\square$

Jako wniosek z ogólnych twierdzeń można uzyskać również twierdzenia dotyczące σ-ideałów $\mathcal{I}$ o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych i σ-ciał postaci $Bor[\mathcal{I}]$. Ideały i ciała tej postaci były badane przez Cichonia i Jasińskiego w pracy [10]. Przedstawione niżej twierdzenia stanowią wzmocnienie głównego wyniku z tej pracy.

Twierdzenie 3.1.43. *Niech $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych. Wtedy*

- *dla dowolnego zbioru A takiego, że $A + A \notin \mathcal{I}$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin Bor[\mathcal{I}]$,*
- *dla dowolnych zbiorów A, B takich, że $A + B \notin \mathcal{I}$, istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y \notin Bor[\mathcal{I}]$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego zbioru $X \in Bor[\mathcal{I}] \setminus \mathcal{I}$ istnieje zbiór doskonały $P \subseteq X$. Istotnie, niech $B \in Bor$ będzie takim zbiorem, że $B \vartriangle X \in \mathcal{I}$. Oczywiście $B \notin \mathcal{I}$. Niech $C \in \mathcal{I}$ będzie zbiorem koanalitycznym takim, że $B \vartriangle X \subseteq C$. Wtedy zbiór $B \setminus C$ jest analitycznym podzbiorem zbioru X. Ponieważ $B \setminus C \notin \mathcal{I}$, zatem w szczególności $|B \setminus C| > \omega$, istnieje więc zbiór doskonały $P \subseteq (B \setminus C) \subseteq X$. $\square$

Wniosek 3.1.44. *Następujące warunki są równoważne dla σ-ideału $\mathcal{I}$ o bazie złożonej ze zbiorów koanalitycznych:*

1. $\exists A \in \mathcal{I}\ \ A + A \notin \mathcal{I}$,

2. $\exists A \in \mathcal{I}\ \ A + A \notin Bor[\mathcal{I}]$,

3. $\exists A, B \in \mathcal{I}\ \ A + B \notin \mathcal{I}$,

4. $\exists A, B \in \mathcal{I}\ \ A + B \notin Bor[\mathcal{I}]$. $\square$

W dowodach ogólnych twierdzeń dotyczących par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ o własności zbioru doskonałego skorzystaliśmy wyłącznie z następujących własności rodziny $Perf$ w rozważanej przestrzeni:

- $|Perf| \leqslant \mathfrak{c}$,
- $\forall P \in Perf\ \ |P| = \mathfrak{c}$.

Obserwacja ta pozwala nam w analogiczny sposób udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.45. *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem podzbiorów przestrzeni 2^ω, a $\mathcal{A}$ – ciałem podzbiorów 2^ω zawierającym ideał $\mathcal{I}$. Załóżmy, że istnieje rodzina $\mathcal{F} \subseteq [2^\omega]^\mathfrak{c}$ mocy co najwyżej $\mathfrak{c}$, o tej własności, że dla każdego zbioru $X \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{I}$ istnieje zbiór $F \in \mathcal{F}$ zawarty w X. Wtedy*

- *dla dowolnego zbioru $A \subseteq 2^\omega$ takiego, że $A + A \notin \mathcal{I}$, istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{A}$,*
- *dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq 2^\omega$ takich, że $A + B \notin \mathcal{I}$, istnieją zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$ takie, że $X + Y \notin \mathcal{A}$.* $\square$

Z tak sformułowanego twierdzenia możemy wyciągnąć ogólne wnioski dotyczące ciał i ideałów posiadających tak zwaną reprezentację Marczewskiego–Burstina odpowiedniej postaci.

Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\}$. Niech $\mathbf{MB}(\mathcal{F})$ będzie rodziną takich zbiorów X, że

$$\forall P \in \mathcal{F}\ \exists Q \in \mathcal{F}\ \Big(Q \subseteq P \wedge (Q \cap X = \emptyset \vee Q \subseteq X)\Big),$$

a $\mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$ – rodziną takich zbiorów X, że

$$\forall P \in \mathcal{F}\ \exists Q \in \mathcal{F}\ \Big(Q \subseteq P \wedge Q \cap X = \emptyset\Big).$$

Nietrudno sprawdzić, że rodzina $\mathbf{MB}(\mathcal{F})$ tworzy zawsze ciało zbiorów, a rodzina $\mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$ jest ideałem (zob. [2]). W ogólnym przypadku ani to ciało, ani ideał nie muszą być jednak σ-zupełne.

Powiemy, że ciało zbiorów $\mathcal{A}$ podzbiorów przestrzeni 2^ω jest reprezentowalne w sensie Burstina–Marczewskiego (lub krótko: MB-reprezentowalne), jeżeli istnieje taka rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega) \setminus \{\emptyset\}$, że $\mathcal{A} = \mathbf{MB}(\mathcal{F})$. Analogicznie, ideał $\mathcal{I}$ jest reprezentowalny w sensie Burstina–Marczewskiego, jeżeli $\mathcal{I} = \mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$ dla pewnej takiej rodziny $\mathcal{F}$.

Dla przykładu odnotujmy, że mamy następujące reprezentacje niektórych rozważanych dotychczas σ-ciał i σ-ideałów (zobacz [7] i [8]).

- $(s) = \mathbf{MB}(Perf)$ i $(s_0) = \mathbf{MB}_0(Perf)$,
- $\mathcal{LM} = \mathbf{MB}(Perf \setminus \mathcal{N})$ i $\mathcal{N} = \mathbf{MB}_0(Perf \setminus \mathcal{N})$,
- $\mathcal{BP} = \mathbf{MB}(G_\delta \setminus \mathcal{M})$ i $\mathcal{M} = \mathbf{MB}_0(G_\delta \setminus \mathcal{M})$.

Jako prosty wniosek z twierdzenia 3.1.45 możemy odnotować następujący fakt.

Wniosek 3.1.46. *Niech* $\mathcal{F} \subseteq [2^\omega]^\mathfrak{c}$ *będzie rodziną zbiorów taką, że* $|\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{c}$. *Wtedy*

- *dla dowolnego zbioru* $A \subseteq 2^\omega$ *o tej własności, że* $A + A \notin \mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$, *istnieje zbiór* $X \subseteq A$ *taki, że* $X + X \notin \mathbf{MB}(\mathcal{F})$,
- *dla dowolnych zbiorów* $A, B \subseteq 2^\omega$ *o tej własności, że* $A+B \notin \mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$, *istnieją zbiory* $X \subseteq A$ *oraz* $Y \subseteq B$ *takie, że* $X + Y \notin \mathbf{MB}(\mathcal{F})$. □

Odnotujmy też, że fakty analogiczne do twierdzenia 3.1.45 i wniosku 3.1.46 można udowodnić w przestrzeni $\mathbb{R}$, zakładając jednak dodatkowo, że rozważany ideał jest σ-ideałem.

Wniosek 3.1.46 można stosować do wielu ciał i ideałów rozważanych w teorii mnogości. W szczególności założenia tego twierdzenia spełnia ciało zbiorów całkowicie Ramseya i ideał zbiorów Ramseya-zero (zob. [20], str. 133–134). Wprost z definicji wynika również, że MB-reprezentacje spełniające założenia wniosku 3.1.46 posiadają rozważane w rozdziale 4. ideały (l_0) i (m_0).

3.1.3 Algebra zbiorów borelowskich

Nasuwa się naturalne pytanie, czy jakiekolwiek analogiczne rezultaty można udowodnić dla σ-algebry zbiorów borelowskich. Oczywiście, jeżeli A, B są niepustymi zbiorami borelowskimi i przynajmniej jeden z nich jest nieprzeliczalny, to istnieją takie zbiory $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$, że $X + Y \notin Bor$. Zakładając, że zbiór B jest nieprzeliczalny, wystarczy wybrać $X = \{x\}$ dla pewnego $x \in A$, a za Y przyjąć dowolny nieborelowski podzbiór zbioru B.

Korzystając z już udowodnionych twierdzeń możemy wykazać (zarówno w przestrzeni 2^ω jak i $\mathbb{R}$) następujący fakt.

Stwierdzenie 3.1.47. *Jeżeli A jest nieprzeliczalnym zbiorem borelowskim, to istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin Bor$.*

Dowód. Para $\langle Bor(2^\omega), [2^\omega]^{\leqslant\omega}\rangle$ (odpowiednio $\langle Bor(\mathbb{R}), [\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}\rangle$) ma własność zbioru doskonałego, zatem fakt ten wynika natychmiast z twierdzeń 3.1.35 i 3.1.37. □

W literaturze zostały opisane przykłady zbiorów borelowskich, których sumy algebraiczne są analityczne, ale nie są borelowskie. Przykłady takie podane zostały w pracach [16], [34], temat ten był też dyskutowany w [10]. W kontekście zaprezentowanych dotychczas wyników nasuwa się pytanie, czy dla dowolnych nieprzeliczalnych zbiorów borelowskich A, B znajdziemy zbiory borelowskie $A' \subseteq A$ oraz $B' \subseteq B$ takie, że zbiór $A' + B'$ nie będzie borelowski. Poniższe twierdzenie odpowiada na to pytanie negatywnie.

Twierdzenie 3.1.48. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq \mathbb{R}$ taki, że dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq P$ zbiór $A + B$ jest borelowski. W szczególności, dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq P$, zbiór $A + A$ jest borelowski.*

Dowód. Niech P będzie zbiorem doskonałym liniowo niezależnym nad $\mathbb{Q}$ (zob. [20], ćwiczenie 19.2). Zauważmy, że dla dowolnych par $\langle p_0, q_0\rangle$, $\langle p_1, q_1\rangle \in P^2$, jeżeli zachodzi równość $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$, to spełniony jest jeden z poniższych warunków

1. $\langle p_0, q_0\rangle = \langle p_1, q_1\rangle$,
2. $\langle p_0, q_0\rangle = \langle q_1, p_1\rangle$.

Istotnie, jeżeli $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$, to korzystając z liniowej niezależności P, łatwo pokazujemy, że punkty p_0, q_0, p_1, q_1 nie mogą być parami różne. Jeżeli $p_0 = p_1$ lub $q_0 = q_1$, to spełniony jest warunek 1., natomiast równość $p_0 = q_1$ lub $q_0 = p_1$ implikuje warunek 2. Jeżeli $p_0 = q_0$, to mamy równość $2p_0 = p_1 + q_1$ (przypadek $p_1 = q_1$ jest oczywiście analogiczny). Liniowa niezależność zbioru P implikuje, że trzy punkty występujące w tej równości nie mogą być parami różne. Jeżeli $p_1 = q_1$, to otrzymujemy warunek 1., w pozostałych przypadkach otrzymamy równość $p_0 = p_1 = q_0 = q_1$.

Niech $C^* = \{\langle p, q\rangle \in P^2 : p < q\}$ oraz $C_* = \{\langle p, q\rangle \in P^2 : p \geqslant q\}$. Widzimy, że $P^2 = C^* \cup C_*$ i oba zbiory C^*, C_* są borelowskie. Z powyższych rozważań wynika, że operacja dodawania $\Phi : P \times P \to P + P$, określona wzorem $\Phi(p, q) = p + q$, jest różnowartościowa po obcięciu do każdego z tych zbiorów.

Jeżeli zatem weźmiemy dowolne zbiory borelowskie $A, B \subseteq P$, to mamy

$$A + B = \Phi[(A \times B) \cap C^*] \cup \Phi[(A \times B) \cap C_*].$$

Oba składniki sumy po prawej stronie powyższej równości są zbiorami borelowskimi, jako różnowartościowe ciągłe obrazy zbiorów borelowskich. $\square$

Analogiczny fakt jest prawdziwy w zbiorze Cantora. Zaprezentowany poniżej dowód jest w zasadzie analogiczny do dowodu dla $\mathbb{R}$, choć różni się istotnie w szczegółach technicznych.

Twierdzenie 3.1.49. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq 2^\omega$ taki, że dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq P$ zbiór $A + B$ jest borelowski. W szczególności, dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq P$, zbiór $A + A$ jest borelowski.*

Dowód. Niech $P \subseteq 2^\omega$ będzie zbiorem doskonałym, liniowo niezależnym nad $\mathbb{Z}_2$ (istnienia takiego zbioru dowodzi się analogicznie jak w $\mathbb{R}$). Przyjmijmy również $\Delta = \{\langle p, p\rangle : p \in P\}$. Zauważmy, że dla dowolnych par $\langle p_0, q_0\rangle, \langle p_1, q_1\rangle \in P^2$, jeżeli $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$, to spełniony jest jeden z poniższych warunków

1. $\langle p_0, q_0\rangle = \langle p_1, q_1\rangle$,

2. $\langle p_0, q_0\rangle = \langle q_1, p_1\rangle$,

3. $\langle p_0, q_0\rangle, \langle p_1, q_1\rangle \in \Delta$.

Istotnie, jeżeli $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$ to, podobnie jak w poprzednim dowodzie, punkty p_0, q_0, p_1, q_1 nie mogą być parami różne. Jeżeli $p_0 = p_1$ lub $q_0 = q_1$, to spełniony jest warunek 1.; $p_0 = q_1$ lub $q_0 = p_1$ implikuje warunek 2., wreszcie $p_0 = q_0$ lub $p_1 = q_1$ pociąga za sobą warunek 3..

Rozważmy relację $\prec$ ostrego porządku na zbiorze P określoną wzorem

$$x \prec y \quad \longleftrightarrow \quad x(n_{x,y}) < y(n_{x,y}),$$

gdzie $n_{x,y} = \min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}$ dla $x, y \in P$ takich, że $x \neq y$. Niech $C^* = \{\langle p, q\rangle \in P^2 : p \prec q\}$ oraz $C_* = \{\langle p, q\rangle \in P^2 : q \prec p\}$. Widzimy, że $P^2 = C^* \cup \Delta \cup C_*$, ponadto łatwo sprawdzić, że zbiory C^*, C_* oraz Δ są borelowskie. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $\Phi : P \times P \to P + P$, określona wzorem $\Phi(p, q) = p + q$, jest różnowartościowa po obcięciu do zbiorów C_*, C^*. Okazuje się jednak, że w przeciwieństwie do dowodu dla $\mathbb{R}$, nie jest ona różnowartościowa po obcięciu do Δ, gdyż $\Phi[\Delta] = \{\mathbf{0}\}$.

Dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq P$ mamy

$$A + B = \Phi[(A \times B) \cap C_*] \cup \Phi[(A \times B) \cap C_*] \cup \Phi[(A \times B) \cap \Delta].$$

Jeżeli zatem zbiory A, B są borelowskie, to dwa pierwsze składniki powyższej sumy sa zbiorami borelowskimi jako różnowartościowe i ciągłe obrazy zbiorów borelowskich. $\square$

3.2 Asymetryczne podzbiory prostej

W rozdziale tym zaprezentujemy konstrukcję „asymetrycznego” podzbioru prostej rzeczywistej.

Dotychczasowa wiedza dotycząca algebraicznych sum podzbiorów prostej wydawała się sugerować, że suma algebraiczna dwóch zbiorów jest w jakiś sposób podobna do ich różnicy. Dokładniej, sądzono, że jeżeli suma algebraiczna dwóch zbiorów jest w jakimś sensie mała (np. miary zero, czy pierwszej kategorii) to ich różnica jest również mała. Przekonaniu temu mogły sprzyjać na przykład następujące klasyczne wyniki.

Twierdzenie 3.2.1 (Steinhaus, [31]). *Jeżeli zbiór A jest mierzalny miary dodatniej lub ma własność Baire i jest drugiej kategorii, to $A+A$ oraz $A-A$ mają niepuste wnętrza.*

Stwierdzenie 3.2.2 (Steinhaus). *Niech $C \subseteq [0,1]$ będzie „trójkowym” zbiorem Cantora. Wtedy $C+C=[0,2]$ oraz $C-C=[-1,1]$.*

Na konferencji w Lądku Zdroju w 2001 roku (zob. [1]) J. Cichoń przedstawił następujący przykład.

Przykład 3.2.3 (Cichoń). *Niech $A=\{0,2,3\} \subseteq \mathbb{Z}_7$ oraz $B=A^\omega \subseteq (\mathbb{Z}_7)^\omega$. Wtedy $B-B=(\mathbb{Z}_7)^\omega$, a $B+B \in \mathcal{N}((\mathbb{Z}_7)^\omega)$.*

Ponadto sformułował następującą hipotezę ([1]).

Hipoteza 3.2.4. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq \mathbb{R}$ taki, że*

- *zbiór $P-P$ ma niepuste wnętrze,*
- *$P+P+\ldots+P \in \mathcal{N}$ dla dowolnej sumy skończonej długości.*

W rozdziale tym udowodnimy następujące twierdzenie, częściowo odpowiadające na pytanie Cichonia.

Twierdzenie 3.2.5. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $P - P = \mathbb{R}$, a $P + P \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.*

Dowód. Skonstruujemy doskonały zbiór zwarty P' taki, że $P' + P' \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, a $P' - P' = [-7, 7]$ i położymy $P = P' + \mathbb{Z}$.

Otrzymany zbiór P' będzie postaci $\bigcap_{n \in \omega} P_n$, dla zstępującego ciągu $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ zbiorów zwartych. Zbiory P_n skonstruujemy tak, aby $P_n - P_n = [-7, 7]$ oraz $\lambda(P_n + P_n) \leqslant 2 \cdot (\frac{6}{7})^n$ dla każdego $n \in \omega$. Oczywiście drugi z tych warunków gwarantuje nam, że $P' + P' \in \mathcal{N}$. Ze zwartości zbioru P' otrzymujemy natychmiast, że zbiór $P' + P'$ jest zwarty, zatem z faktu, iż $P' + P' \in \mathcal{N}$ wynika też, że $P' + P' \in \mathcal{M}$.

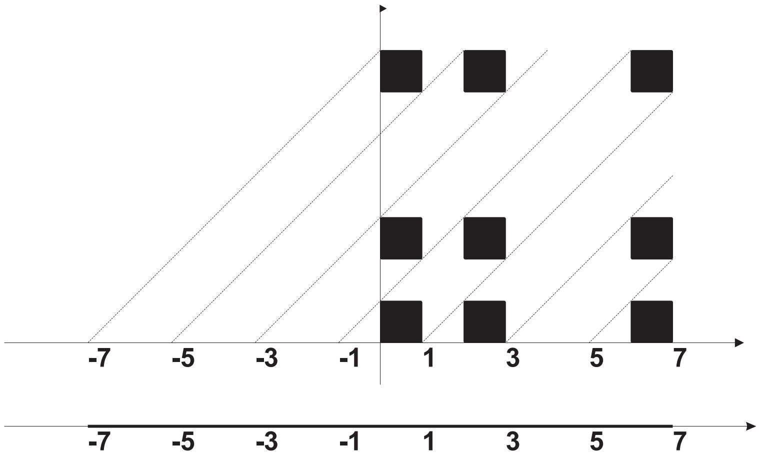
Aby przekonać się, iż warunek $\forall n \; P_n - P_n = [-7, 7]$ implikuje, że $P' - P' = [-7, 7]$, potrzebny nam będzie następujący prosty lemat.

Lemat 3.2.6. *Niech $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ będzie zstępującym ciągiem zbiorów zwartych i niech $P' = \bigcap_n P_n$. Wtedy $P' - P' = \bigcap_n (P_n - P_n)$.*

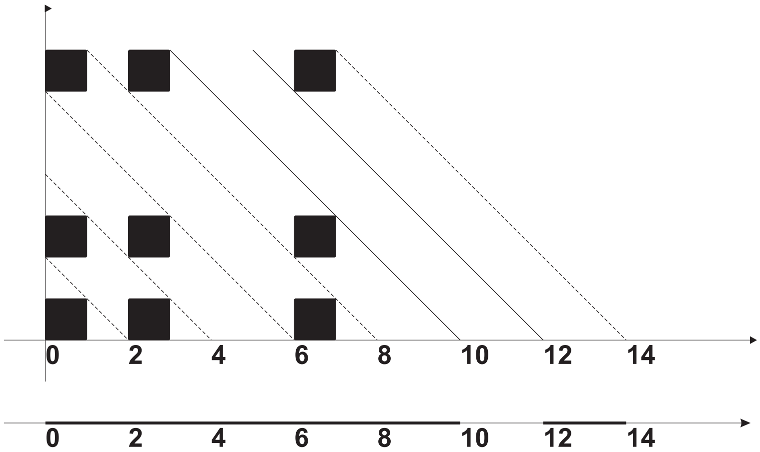
Dowód. Oczywiście $P' - P' \subseteq \bigcap_n (P_n - P_n)$. Aby udowodnić odwrotną inkluzję, weźmy dowolny $x \in \bigcap_n (P_n - P_n)$. Dla każdego $n \in \omega$ istnieją $p_n, q_n \in P_n$ takie, że $x = p_n - q_n$. Korzystając ze zwartości i zastępując ciąg $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ jego podciągiem możemy założyć, że $p_n \to p$ oraz $q_n \to q$. Nietrudno pokazać, że $p, q \in P'$, zatem z ciągłości odejmowania otrzymujemy, że $x = p - q$. □

Dla redakcji dalszej części dowodu zauważmy, że dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$, zbiór $X + X$ jest rzutem zbioru $X \times X$ na oś poziomą w kierunku prostej o równaniu $y = -x$, natomiast zbiór $X - X$ jest rzutem wzdłuż prostej $y = x$.

Niech $P_0 = [0, 7]$. Oczywiście $P_0 - P_0 = [-7, 7]$, a $P_0 + P_0 = [0, 14]$. Przyjmijmy $P_1 = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [6, 7]$. Łatwo przekonać się, że $P_1 - P_1 = [-7, 7]$, co ilustruje następujący rysunek:



Okazuje się jednak, że $P_1 + P_1 = [0, 10] \cup [12, 14] \neq [0, 14]$:

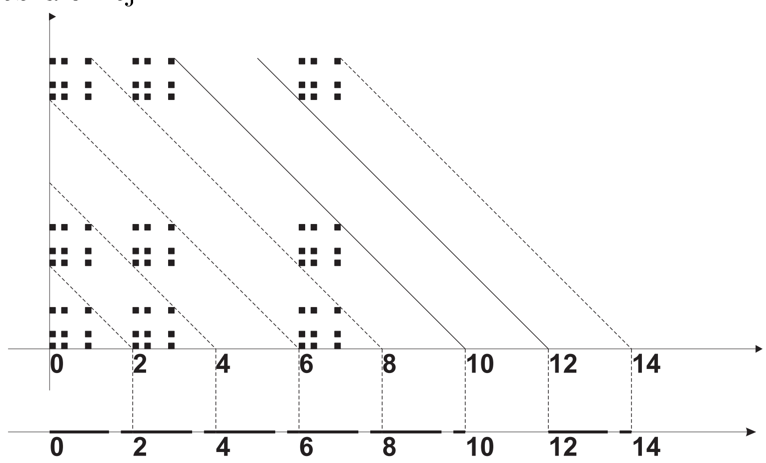


Jak łatwo widać, $\lambda(P_1 + P_1) = \frac{6}{7} \cdot \lambda(P_0 + P_0)$. Po przejściu od P_0 do P_1 zbiór $P_0 + P_0 = [0, 14]$ zostaje podzielony na 7 równych części, z których w skład $P_1 + P_1$ wchodzą wszystkie oprócz części szóstej, czyli przedziału

$[10, 12]$ (nazwijmy go umownie *luką*).

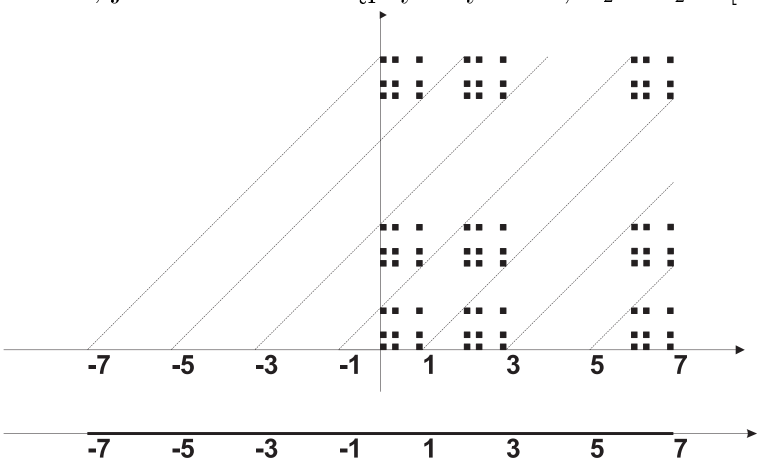
Zbiór P_1 składa się z trzech przedziałów domkniętych. Powstał on poprzez podzielenie przedziału P_0 na siedem równych części i pozostawienie części pierwszej, trzeciej i ostatniej. Aby zdefiniować zbiór P_2 wykonamy analogiczną operację na każdym z przedziałów wchodzących w skład P_1. Ogólnie, każdy konstruowany zbiór P_n będzie sumą przedziałów, z których każdy podzielimy na 7 równych części i pozostawimy z nich pierwszą, trzecią i ostatnią, otrzymując w ten sposób P_{n+1}.

Następujący rysunek ilustruje zachowanie zbioru P_2 przy operacji sumy algebraicznej:



Widzimy, że w każdym z przedziałów wchodzących w skład $P_1 + P_1$ pojawia się po przejściu do $P_2 + P_2$ analogiczna luka, zatem $\lambda(P_2 + P_2) = \frac{6}{7}\lambda(P_1 + P_1)$.

Z kolei, jak widać na następnym rysunku, $P_2 - P_2 = [-7, 7]$:



Nietrudno przekonać się, że kontynuując taką procedurę konstrukcji zbiorów P_n, spełnimy warunki $P_n - P_n = [-7, 7]$ oraz $\lambda(P_{n+1} + P_{n+1}) = \frac{6}{7} \cdot \lambda(P_n + P_n)$. □

Jako wniosek otrzymujemy również następujący fakt.

Wniosek 3.2.7. *Istnieje zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $X + X \in \mathcal{N}$, a $X - X$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Dowód. Wynika łatwo z twierdzeń 3.2.5 i 3.1.15. □

Wniosek 3.2.8. *Istnieje zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $X + X \in \mathcal{M}$, a $X - X$ nie ma własności Baire'a.*

Dowód. Wynika łatwo z twierdzeń 3.2.5 i 3.1.17. □

Stwierdzenie 3.2.9. *Istnieją zbiory domknięte $P, Q \subseteq R$ takie, że $P + Q = \mathbb{R}$, a $P - Q \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.*

Dowód. Wystarczy rozważyć $Q = -P$, gdzie $P \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym takim, że $P - P = \mathbb{R}$, a $P + P \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$. □

Wniosek 3.2.10. *Istnieją zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $X - Y \in \mathcal{N}$, a $X + Y$ jest zbiorem niemierzalnym.* $\square$

Wniosek 3.2.11. *Istnieją zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $X - Y \in \mathcal{M}$, a zbiór $X + Y$ nie ma własności Baire'a.* $\square$

W kontekście powyższych wyników naturalna jest następująca hipoteza, do udowodnienia której wykorzystane powyżej geometryczne techniki wydają się być zbyt słabe.

Hipoteza 3.2.12. *Istnieje zbiór doskonały $P \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $P + P = \mathbb{R}$, a $P - P \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.*

Na poparcie tej hipotezy przedstawimy następującą obserwację.

Stwierdzenie 3.2.13. *Istnieje zbiór doskonały $B \subseteq (\mathbb{Z}_{12})^\omega$ taki, że $B - B \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, a $B + B = (\mathbb{Z}_{12})^\omega$.*

Dowód. Rozważmy zbiór $A = \{3, 6, 7, 8, 10, 11\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$. Nietrudno przekonać się, że $A + A = \mathbb{Z}_{12}$, ale $6 \notin A - A$. Wystarczy zatem przyjąć $B = A^\omega$. $\square$

4 Małe zbiory i drzewiaste forcingi

W rozdziale tym zajmiemy się własnościami różnych rodzin małych zbiorów, które są blisko związane z ideałami miary i kategorii.

W rozdziale 2.5. wprowadziliśmy definicje rodzin zbiorów silnie miary zero (**SMZ**), uniwersalnie miary zero (**UMZ**), silnie pierwszej kategorii (**SFC**), bardzo pierwszej kategorii (**VFC**), uniwersalnie pierwszej kategorii (**UFC**) i zawsze pierwszej kategorii (**AFC**). Badanie własności tych rodzin stanowi istotny nurt współczesnej teorii mnogości.

Jednym z wątków przewijających się w literaturze jest rozważanie związków tych klas z ideałami związanymi w naturalny sposób ze znanymi pojęciami forcingu.

Niech $\mathcal{F}$ będzie pojęciem forcingu, którego warunki są borelowskimi podzbiorami 2^ω, a porządkiem – relacja inkluzji. Z forcingiem $\mathcal{F}$ możemy związać w naturalny sposób ideał $f_0 = \mathbf{MB}_0(\mathcal{F})$. Przypomnijmy, że oznacza to, iż $X \in f_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego warunku $P \in \mathcal{F}$ istnieje warunek $Q \leqslant P$ taki, że $Q \cap X = \emptyset$. Nietrudno przekonać się, że dla $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ zachodzi $f_0 = \mathcal{M}$, a dla $\mathcal{F} = \mathbb{B}$ mamy $f_0 = \mathcal{N}$.

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie zbiorów s_0. Oczywiście ideał (s_0) jest ideałem odpowiadającym (w powyższym sensie) forcingowi Sacksa $\mathbb{S}$. Zauważmy, że zbiór $X \subseteq \omega^\omega$ jest zbiorem s_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego drzewa doskonałego T istnieje drzewo doskonałe $T' \subseteq T$ takie, że $[T'] \cap X = \emptyset$.

W podobny sposób definiujemy analogiczne klasy dla forcingów Lavera i Millera.

Definicja 4.0.14. Mówimy, że zbiór $X \subseteq \omega^\omega$

- ma własność l_0 ($X \in (l_0)$), gdy
$$\forall T \in \mathbb{L}\ \exists T' \in \mathbb{L}\ (T' \subseteq T\ \wedge\ [T'] \cap X = \emptyset),$$
- ma własność m_0 ($X \in (m_0)$), gdy
$$\forall T \in \mathbb{M}\ \exists T' \in \mathbb{M}\ (T' \subseteq T\ \wedge\ [T'] \cap X = \emptyset).$$

Stosując oznaczenia z poprzedniego rozdziału, możemy powiedzieć, że $l_0 = \mathbf{MB}_0(\{[T] : T \in \mathbb{L}\})$ oraz $m_0 = \mathbf{MB}_0(\{[T] : T \in \mathbb{M}\})$.

Związki pomiędzy klasami $(l_0), (m_0), (s_0)$ były już badane. W szczególności J. Brendle w pracy [5] pokazał (w ZFC) , że pomiędzy żadnymi dwiema z tych klas nie zachodzi inkluzja.

Wiadomo, że $\mathbf{AFC} \cup \mathbf{UMZ} \subseteq (s_0)$. Wynika stąd w szczególności, że wszystkie wymienione we wstępie klasy małych zbiorów (jak **SMZ**, **SFC**, **VFC**) są również zawarte w klasie (s_0).

W pracy [6] J. B. Brown rozważał między innymi pytanie, czy zbiory **SMZ** mają własność $(cr)_0$ (jest to analogiczna własność związana z forcingiem Mathiasa). Również w pracy [28] rozważane są związki pomiędzy klasą $(cr)_0$ a innymi klasami małych zbiorów.

W rozdziale tym zajmiemy się pytaniem, które z klas **SMZ**, **UMZ**, **SFC**, **VFC**, **UFC**, **AFC**, związanych z ideałami miary i kategorii są zawarte w ideałach (l_0) i (m_0). Badania tego tematu zostały rozpoczęte przez Nowika i Weissa w pracy [29].

Ponieważ własności klas $\mathbf{SFC}, \mathbf{VFC}, \mathbf{SMZ}, \mathbf{AFC}, \mathbf{UMZ}$ rozpatruje się najczęściej w przestrzeni 2^ω na potrzeby dalszych rozważań rozszerzymy pojęcia własności l_0 i m_0 na podzbiory tej przestrzeni. Odnotujmy też, że w sposób analogiczny do opisanego poniżej, można wprowadzić definicje zbiorów l_0 i m_0 również w przestrzeni $[0,1]$. Wszystkie zaprezentowane dalej rezultaty dotyczące tych ideałów w przestrzeni 2^ω mają swoje odpowiedniki również dla przestrzeni $[0,1]$.

Oznaczmy przez $\omega^{\uparrow\omega}$ zbiór wszystkich ściśle rosnących funkcji będących elementami przestrzeni ω^ω. Nietrudno sprawdzić, że funkcja $\phi_1 : \omega^\omega \to \omega^{\uparrow\omega}$ określona następująco

$$\phi_1 : \langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle \longmapsto \langle x_0 + 0, x_0 + x_1 + 1, x_0 + x_1 + x_2 + 2, ...\rangle$$

jest homeomorfizmem. Również funkcja $\phi_2 : \omega^{\uparrow\omega} \to [\omega]^\omega \subseteq 2^\omega$, przyporządkowująca funkcji $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ funkcję charakterystyczną zbioru $\mathrm{rg}(f) \subseteq \omega$, jest homeomorfizmem przestrzeni $\omega^{\uparrow\omega}$ z przestrzenią $[\omega]^\omega$. Zatem funkcja $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ jest homeomorficznym zanurzeniem przestrzeni ω^ω na ko-przeliczalny podzbiór przestrzeni 2^ω.

Definicja 4.0.15. Powiemy, że zbiór $X \subseteq 2^\omega$ ma własność l_0 (odpowiednio m_0), jeżeli zbiór $\phi^{-1}[X]$ ma własność l_0 (odpowiednio m_0) w przestrzeni ω^ω.

Definicja zbiorów s_0 ma sens w każdej przestrzeni polskiej, w szczególności w przestrzeniach 2^ω i ω^ω. Moglibyśmy jednak, wychodząc od standardowej definicji zbiorów s_0 w przestrzeni ω^ω, zdefiniować własność s_0 w przestrzeni 2^ω w taki sposób, jak zrobiliśmy to dla własności l_0 i m_0 w definicji 4.0.15. Odnotujmy, że definicja taka byłaby równoważna zwykłej definicji zbiorów s_0 w przestrzeni 2^ω.

Stwierdzenie 4.0.16. *Zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem s_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{-1}[X]$ jest zbiorem s_0 w przestrzeni ω^ω.*

Dowód. Łatwo wynika z faktu, że dla dowolnego zbioru doskonałego w 2^ω istnieje jego doskonały podzbiór zawarty w $[\omega]^\omega$. □

Homeomorfizm $\phi : \omega^\omega \to [\omega]^\omega$ ustaliliśmy dla logicznej poprawności definicji 4.0.15. Nietrudno przekonać się, że definicja zbiorów m_0 nie zależy od wyboru konkretnego homeomorfizmu tych przestrzeni. Również stwierdzenie 4.0.16 pozostanie prawdziwe, jeżeli wykorzystamy inny homeomorfizm w miejsce ϕ. Nie jest jasne, czy definicja klasy (l_0) w przestrzeni 2^ω zależy od wyboru homeomorfizmu, niemniej wszystkie przedstawione w dalszej części rozprawy dowody pozostaną poprawne, jeżeli rozważymy inny homeomorfizm w miejsce ϕ.

Zauważmy też, że zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem **AFC** (**UMZ**) wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^{-1}[X]$ jest zbiorem **AFC** (odpowiednio **UMZ**) w przestrzeni ω^ω. Jeżeli zatem potraktujemy ϕ jako utożsamienie przestrzeni ω^ω z podprzestrzenią przestrzeni 2^ω, możemy nie odwoływać się za każdym razem do konkretnej przestrzeni pisząc o zbiorach **AFC** czy **UMZ**.

Własność **SMZ** jest zdefiniowana w odniesieniu do metryki i w ogólnym przypadku może istotnie zależeć od jej wyboru. Ustalmy zatem w przestrzeni ω^ω metrykę określoną wzorem

$$d(x, y) = \frac{1}{\min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\} + 1} \quad \text{dla } x \neq y.$$

Pisząc $\mathbf{SMZ}(\omega^\omega)$ będziemy mieli na myśli rodzinę zbiorów silnie miary zero w przestrzeni metrycznej $\langle \omega^\omega, d \rangle$.

Ponieważ wiadomo, że w przestrzeniach zwartych własność **SMZ** nie zależy od wyboru metryki na całej przestrzeni, będziemy pisać krótko $\mathbf{SMZ}(2^\omega)$, mając na myśli rodzinę zbiorów silnie miary zero w przestrzeni 2^ω.

Odnotujmy jeszcze prosty fakt (należący z pewnością do folkloru teoriomnogościowego) dotyczący ideałów (l_0) i (m_0), z którego kilkakrotnie skorzystamy:

Stwierdzenie 4.0.17. *Jeżeli* $|X| < \mathfrak{c}$, *to* X *na własność* l_0 *i własność* m_0.

Dowód. Łatwo wynika z faktu, że jeżeli T jest drzewem Lavera (Millera), to istnieje rodzina $\{T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ drzew Lavera (odpowiednio Millera) zawartych w T i takich, że dla $\alpha \neq \beta$ mamy $[T_\alpha] \cap [T_\beta] = \emptyset$. Jeżeli zatem $|X| < \mathfrak{c}$, to dla pewnego $\alpha < \mathfrak{c}$ mamy $X \cap [T_\alpha] = \emptyset$. □

4.1 Podideały ideału kategorii

W pracy [29] udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.1 (Nowik–Weiss). *Jeżeli* $X \subseteq 2^\omega$ *jest zbiorem* **VFC**, *to* X *ma własność* l_0 *i własność* m_0.

Okazuje się, że rozważając własność m_0 twierdzenie to można znacznie wzmocnić.

Twierdzenie 4.1.2. *Każdy zbiór* $X \in$ **AFC** *ma własność* m_0.

Dowód. Skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 4.1.3. *Dla dowolnego zbioru* $F \in \mathcal{M}(\omega^\omega)$ *istnieje drzewo Millera* T *takie, że* $F \cap [T] = \emptyset$.

Dowód. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że zbiór F jest borelowski. Kechris wykazał w [19], że dowolny zbiór borelowski $B \subseteq \omega^\omega$ jest σ-ograniczony lub zawiera zbiór gałęzi pewnego drzewa Millera. Wystarczy zatem zauważyć, że zbiór $\omega^\omega \setminus F$, jako zbiór rezidualny, nie może być zdominowany. $\square$

Powiemy, że zbiór domknięty $P \subseteq \omega^\omega$ jest nigdziezwarty, jeżeli dla dowolnego niepustego zbioru $U \subseteq P$ otwartego (w topologii podprzestrzeni P) zbiór $U \cap P$ nie jest zwarty.

Lemat 4.1.4. *Niech $P \subseteq \omega^\omega$ będzie zbiorem domkniętym, a $T \subseteq \omega^{<\omega}$ – drzewem takim, że $P = [T]$. Wtedy P jest nigdziezwarty wtedy i tylko wtedy, gdy T jest drzewem Millera.*

Dowód. Przypuśćmy, że T nie jest drzewem Millera. Wówczas istnieje takie $s \in T$, że T ma wyłącznie rozgałęzienia skończone poniżej s, zatem zbiór $[T] \cap [s]$ jest zwarty.

Dla dowodu implikacji odwrotnej weźmy dowolne drzewo Millera T. Gdyby zbiór $[T] \cap U$ był zwarty dla pewnego zbioru otwartego U, to zwarty byłby również zbiór $[T] \cap [s]$ dla każdego $s \in T$ takiego, że $[s] \subseteq U$. Wtedy nietrudno pokazać, że drzewo T miałoby wyłącznie skończone rozgałęzienia poniżej s. $\square$

Weźmy $X \in \mathbf{AFC}$ oraz dowolne drzewo Millera T. Zbiór $[T] \cap X$ jest pierwszej kategorii w $[T]$. Ponieważ zbiór $[T]$ jest homeomorficzny z ω^ω, korzystając z lematów 4.1.3 i 4.1.4 znajdujemy domknięty nigdziezwarty podzbiór P zbioru $[T]$ rozłączny z X. Wtedy drzewo $T' \subseteq T$ takie, $[T'] = P$ jest drzewem Millera i $[T'] \cap X = \emptyset$. $\square$

Okazuje się jednak, że dla własności l_0 analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe nawet w odniesieniu do mniejszej klasy zbiorów, mianowicie zbiorów uniwersalnie pierwszej kategorii.

Twierdzenie 4.1.5 (Weiss, [27]). *Przy założeniu* CH *istnieje zbiór* **UFC**, *który nie ma własności* l_0.

Dowód opiera się na konstrukcji ω_1-skali (czyli rosnącego w sensie $\leqslant^*$ i dominującego ciągu długości ω_1, złożonego z elementów ω^ω), która przecina zbiory gałęzi wszystkich drzew Lavera. Wiadomo było wcześniej ([30]), że ω_1-skala jest tzw. zbiorem $\mathbf{AFC}'$, a własność ta implikuje w szczególności własność **UFC**.

Przykładu takiego, jak w twierdzeniu 4.1.5, nie można skonstruować w ZFC. Przy założeniu aksjomatu CPA (patrz [13], tw. 1.1.4) każdy zbiór **AFC** ma moc mniejszą niż $\mathfrak{c}$, a jak wiemy, zbiory takie mają własność l_0.

4.2 Podideały ideału miary

W rozdziale tym skoncentrujemy się na badaniu zbiorów silnie miary zero. Wyniki dotyczące ideału **UMZ** uzyskamy w zasadzie jako wnioski z twierdzeń dotyczących **SMZ**.

Jak zauważyliśmy na wstępie, ponieważ przestrzeń ω^ω nie jest σ-zwarta, dla podzbiorów tej przestrzeni własność bycia zbiorem silnie miary zero może zależeć od przyjętej metryki. Uprzednio wprowadziliśmy i ustaliliśmy metrykę d na tej przestrzeni, do której będziemy się zawsze odwoływać pisząc o zbiorach $\mathbf{SMZ}(\omega^\omega)$. Zauważmy jednak, że korzystając z ustalonego wcześniej homeomorfizmu ϕ, utożsamiającego przestrzeń ω^ω z przestrzenią $[\omega]^\omega \subseteq 2^\omega$, możemy myśleć o przestrzeni ω^ω jako o podprzestrzeni przestrzeni Cantora, wprowadzając zarazem w ω^ω metrykę dziedziczoną z 2^ω.

Dzięki takiemu podejściu możemy myśleć o rezultatach dotyczących zbiorów $\mathbf{SMZ}(2^\omega)$ jako o rezultatach dotyczących zbiorów silnie miary zero w przestrzeni ω^ω z metryką dziedziczoną z 2^ω (traktując część zbioru zawartą w $[\omega]^{<\omega}$ jako zaniedbywalną). Nietrudno przekonać się, że wybór konkretnej metryki na 2^ω jest tu nieistotny.

Okazuje się, że klasa zbiorów silnie miary zero w ω^ω zdefiniowana w terminach metryki d różni się istotnie od analogicznej klasy zdefiniowanej dla metryki dziedziczonej ze zbioru Cantora. W szczególności dla pierwszej z tych klas wykażemy, że zawarta jest w ideałach (l_0) i (m_0), tymczasem dla drugiej z nich skonstruujemy (przy założeniu Hipotezy Continuum) przykłady zbiorów, które są w tej klasie, ale nie mają własności l_0 i m_0.

4.2.1 Zbiory silnie miary zero w przestrzeni Baire'a

Twierdzenie 4.2.1. *Jeżeli $X \in \mathbf{SMZ}(\omega^\omega)$, to X ma własność m_0.*

Dowód. Skorzystamy z następującego kombinatorycznego lematu.

Lemat 4.2.2. *Dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$, istnieje funkcja rosnąca $g \in \omega^\omega$ taka, że dla dowolnej różnowartościowej funkcji $i : \omega \to \omega$ oraz dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodzi*

$$g \circ i \not\leqslant^* f.$$

Dowód. Weźmy ściśle rosnącą funkcję g taką, że

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall^\infty n\ f(n) < g(n).$$

Wykażemy, że g spełnia żądany warunek.

Niech $\langle i_n : n \in \omega \rangle$ będzie różnowartościowym ciągiem liczb naturalnych. Przypuśćmy, że ciąg ten świadczy o tym, że g nie spełnia tezy lematu, to znaczy $\forall^\infty n\ g(i_n) \leqslant f(n)$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{F}$.

Zauważmy, że

$$\exists^\infty n \; i_n \geqslant n.$$

Istotnie, gdyby tak nie było, mielibyśmy $\forall^\infty n \; i_n < n$. Wówczas istniałaby liczba $N \in \omega$ taka, że $\forall n \geqslant N \; i_n < n$, przyjmijmy też

$$K = \max(\{i_k : k < N\} \cup \{N\}) + 1.$$

Łatwo zauważyć, że $\forall k < K \; i_k < K$, więc $\{i_k : k < K\} = K$. Wtedy jednak $i_K \geqslant K$, co jest sprzeczne z faktem, że $K \geqslant N$.

Ponieważ $\exists^\infty n \; i_n \geqslant n$, mamy

$$\exists^\infty n \; f(n) \geqslant g(i_n) \geqslant g(n)$$

co jest sprzeczne z wyborem g. □

Niech X będzie zbiorem silnie miary zero w ω^ω, a T – dowolnym drzewem Millera. Dla każdego $s \in \mathrm{Split}(T)$ zdefiniujemy funkcję $f_s \in \omega^\omega$. Załóżmy, że $s \in \mathrm{Split}^m(T)$. Niech $\langle s_n : n \in \omega\rangle$ będzie leksykograficzną numeracją elementów zbioru $\{s' \in \mathrm{Split}^{m+1}(T) : s' \supseteq s\}$; definiujemy $f_s(n) = |s_n|$. Niech $\mathcal{F} = \{f_s : s \in \mathrm{Split}(T)\}$.

Stosując lemat 4.2.2 otrzymujemy funkcję rosnącą $g \in \omega^\omega$ taką, że dla dowolnej różnowartościowej funkcji $i : \omega \to \omega$ i dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodzi $g \circ i \not\leqslant^* f$. Nietrudno zażądać dodatkowo od g, aby $g(0) > |\mathrm{stem}(T)|$. Przyjmijmy $\varepsilon_n = \frac{1}{g(n)}$. Niech $\{t_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^{<\omega}$ będzie takim ciągiem, że $X \subseteq \bigcup_n [t_n]$ i $\delta([t_n]) \leqslant \varepsilon_n$, dla każdego $n \in \omega$. Nietrudno przekonać się, że $|t_n| \geqslant g(n)$.

Zauważmy, że dla dowolnego $m \in \omega$ oraz $s \in \mathrm{Split}^m(T)$, jeżeli tylko $\forall n \in \omega \; t_n \not\subseteq s$, to istnieje nieskończenie wiele $s' \in \mathrm{Split}^{m+1}(T)$ takich, że

$s' \supseteq s$ oraz $\forall n \in \omega\ t_n \nsubseteq s'$. Istotnie, niech $\{s_n : n \in \omega\}$ będzie numeracją leksykograficzną takich $s' \in \mathrm{Split}^{m+1}(T)$, że $s' \supseteq s$. Przypuśćmy, że dla prawie wszystkich $n \in \omega$ istnieje takie $i_n \in \omega$, że $s_n \supseteq t_{i_n}$. Z założenia, że $\forall n \in \omega\ t_n \nsubseteq s$, wynika, iż dla $n \neq n'$ mamy $i_n \neq i_{n'}$. Wtedy dla prawie wszystkich $n \in \omega$ mielibyśmy $f_s(n) = |s_n| \geqslant |t_{i_n}| = g(i_n)$, co przeczy wyborowi funkcji g.

Korzystając z powyższej obserwacji skonstruujemy drzewo Millera $T' \subseteq T$ takie, że $[T'] \cap \bigcup_n [t_n] = \emptyset$. Ponieważ $g(0) > |\mathrm{stem}(T)|$, na mocy powyższej obserwacji zbiór

$$S_1 = \{s' \in \mathrm{Split}^1(T) : \forall n \in \omega\ t_n \nsubseteq s'\}$$

jest nieskończony. Podobnie, dla dowolnego $s \in S_1$ zbiór

$$S_2^s = \{s' \in \mathrm{Split}^2(T) : s' \supseteq s \wedge \forall n \in \omega\ t_n \nsubseteq s'\}$$

jest nieskończony. Połóżmy $S_2 = \bigcup_{s \in S_1} S_2^s$.

Ogólnie, definiujemy dla $s \in S_k$ zbiór

$$S_{k+1}^s = \{s' \in \mathrm{Split}^{k+1}(T) : s' \supseteq s \wedge \forall n \in \omega\ t_n \nsubseteq s'\}$$

oraz $S_{k+1} = \bigcup_{s \in S_k} S_{k+1}^s$.

Nietrudno przekonać się, że jeżeli określimy T' jako najmniejsze drzewo zawierające wszystkie zbiory S_k dla $k > 0$, to otrzymamy drzewo Millera, którego zbiór gałęzi jest rozłączny ze zbiorem $\bigcup_n [t_n]$, a więc tym bardziej ze zbiorem X. $\square$

Twierdzenie 4.2.3 (Weiss, [27]). *Jeżeli $X \in \mathbf{SMZ}(\omega^\omega)$, to X ma własność l_0.*

Ogólna idea dowodu jest bardzo podobna do dowodu twierdzenia 4.2.1. Podobnie jak w twierdzeniu 4.2.1, dla zadanego drzewa Lavera trzeba skonstruować odpowiednio szybko rosnący ciąg $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$. W tym jednak przypadku wystarczy wziąć ciąg $\varepsilon_n = \frac{1}{|\mathrm{stem}(T)|+n+1}$.

4.2.2 Zbiory silnie miary zero w przestrzeni Cantora

Zajmiemy się teraz zbiorami silnie miary zero w przestrzeni 2^ω. Jak wspomnieliśmy, rezultaty uzyskane dla tej klasy są inne, niż dla klasy $\mathbf{SMZ}(\omega^\omega)$. Pokażemy teraz, że przy założeniu Hipotezy Continuum zbiory silnie miary zero w przestrzeni 2^ω nie muszą mieć własności l_0, ani m_0.

Twierdzenie 4.2.4 (Weiss, [27]). *Przy założeniu* CH *istnieje zbiór $X \in \mathbf{SMZ}(2^\omega)$, który nie ma własności m_0.*

Zaprezentujemy tu dowód podany przez autora niniejszej rozprawy, inny niż dowód T. Weissa zamieszczony w pracy [27] i nie korzystający z metody forcingu. Należy zaznaczyć, że dowód ten jest wzorowany na znanym powszechnie dowodzie faktu (który można przypisać prawdopodobnie Rothbergerowi), że tzw. ω_1-granica jest zbiorem silnie miary zero.

Dowód. Niech $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ będzie numeracją wszystkich drzew Millera, a $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ – numeracją elementów przestrzeni ω^ω. Skonstruujemy indukcyjnie ciąg $\langle g_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ elementów przestrzeni ω^ω tak, by

- $g_\alpha \not\leq^* g_\xi$ dla $\xi < \alpha$,

- $g_\alpha \in [T_\alpha]$,
- $g_\alpha \not\leqslant^* f_\alpha$.

Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy już g_ξ dla $\xi < \alpha$. Niech $h_\alpha \in \omega^\omega$ będzie funkcją taką, że $f_\xi \leqslant^* h_\alpha$ dla $\xi < \alpha$. Korzystając z prostego faktu, że $[T_\alpha]$ jest zbiorem nieograniczonym, możemy znaleźć $g_\alpha \in [T_\alpha]$ takie, że $g_\alpha \not\leqslant^* f_\alpha$ oraz $g_\alpha \not\leqslant^* h_\alpha$. Łatwo sprawdzić, że wtedy dla dowolnego $\xi < \alpha$ mamy $g_\alpha \not\leqslant^* g_\xi$.

Zbiór $X = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ma niepuste przecięcie ze zbiorem gałęzi każdego drzewa Millera, zatem jego obraz $\phi[X]$ nie ma własności m_0 w 2^ω. Wystarczy więc pokazać, że zbiór $\phi[X]$ jest zbiorem silnie miary zero w 2^ω. W tym celu pokażemy, że zbiór ten jest skoncentrowany wokół $\mathbb{Q}$, tzn. $|\phi[X] \setminus U| \leqslant \omega$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \supseteq \mathbb{Q}$. Nietrudno sprawdzić, że własność ta implikuje własność $\mathbf{SMZ}(2^\omega)$.

Niech $U \subseteq 2^\omega$ będzie takim zbiorem otwartym. Zbiór $2^\omega \setminus U$ jest wtedy zwartym podzbiorem $[\omega]^\omega$, zatem $\phi^{-1}[F]$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni ω^ω. Weźmy $\alpha_F < \omega_1$ takie, że $\phi^{-1}[F] \leqslant^* f_{\alpha_F}$. Z konstrukcji ciągu $\langle g_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ wynika, że dla $\beta > \alpha_F$ zachodzi $g_\beta \notin \phi^{-1}[F]$. Wynika stąd, że jeżeli $\phi(g_\beta) \notin U$, to $\beta < \alpha_F$. $\square$

Twierdzenie 4.2.5 (Weiss, [27]). *Przy założeniu* CH *istnieje zbiór* $X \in \mathbf{SMZ}(2^\omega)$*, który nie ma własności* l_0.

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4.1.5, przykładem jest ω_1-skala, która nie ma własności l_0.

4.2.3 Zbiory uniwersalnie miary zero

Ponieważ wiadomo, że w przestrzeni 2^ω każdy zbiór silnie miary zero jest uniwersalnie miary zero, jako wniosek z dotychczas udowodnionych twierdzeń otrzymujemy następujący fakt.

Stwierdzenie 4.2.6. *Przy założeniu* CH

- *istnieje zbiór uniwersalnie miary zero, który nie ma własności* l_0*,*
- *istnieje zbiór uniwersalnie miary zero, który nie ma własności* m_0*.*

Dodajmy też, że przykład ten (jak i poprzednie przykłady dla **SMZ**) wymaga skorzystania z pewnego dodatkowego aksjomatu, w tym wypadku CH. Istotnie, przy założeniu aksjomatu CPA każdy zbiór uniwersalnie miary zero jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ ([13], tw. 1.1.4), a zatem ma zarówno własność l_0 jak i m_0. Przykładu takiego nie można zatem skonstruować w ZFC.

5 Produktowalny ideał bez słabej własności Fubiniego

W rozdziale tym zajmiemy się badaniem ogólnych własności ideałów na przestrzeni 2^ω. W szczególności interesować nas będą dwie własności: produktowalność oraz słaba własność Fubiniego.

Dla dowolnego zbioru nieskończonego $T \subseteq \omega$, możemy utożsamić w naturalny sposób przestrzeń 2^ω z przestrzenią $2^T \times 2^{\omega \setminus T}$. O ideale $\mathcal{I}$ podzbiorów przestrzeni 2^ω możemy zatem myśleć jako o ideale podzbiorów przestrzeni $2^T \times 2^{\omega \setminus T}$.

Oznaczmy przez INJ rodzinę wszystkich funkcji różnowartościowych $f : \omega \to \omega$, a przez CIR rodzinę takich $f \in \mathrm{INJ}$, że $|\omega \setminus \mathrm{rg}(f)| = \omega$. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{INJ}$ możemy w naturalny sposób zdefiniować kopię ideału $\mathcal{I}$ na przestrzeni $2^{\mathrm{rg}(f)}$ następująco:

$$\mathcal{I}_f = \{X \subseteq 2^{\mathrm{rg}(f)} : \{x \circ f : x \in X\} \in \mathcal{I}\}.$$

Definicja 5.0.7. Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów przestrzeni 2^ω

- jest produktowalny, jeżeli dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{INJ}$ i podzbioru $X \subseteq 2^{\mathrm{rg}(f)}$ mamy

$$X \in \mathcal{I}_f \Longrightarrow X \times 2^{\omega \setminus \mathrm{rg}(f)} \in \mathcal{I},$$

- ma słabą własność Fubiniego, jeżeli dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{INJ}$ i podzbioru $X \subseteq 2^{\mathrm{rg}(f)}$ mamy

$$X \times 2^{\omega \setminus \mathrm{rg}(f)} \in \mathcal{I} \Longrightarrow X \in \mathcal{I}_f.$$

Mówiąc mniej precyzyjnie, ideał $\mathcal{I}$ jest produktowalny, jeżeli zawiera wszystkie cylindry nad zbiorami z ideałów $\mathcal{I}_f$, natomiast ma słabą własność Fubiniego, jeżeli z faktu, że cylinder należy do ideału $\mathcal{I}$ wynika, że jego podstawa należy do ideału $\mathcal{I}_f$.

Uwaga 5.0.8. Sformułowanie definicji produktowalności i słabej własności Fubiniego odbiega od sformułowania użytego w pracy [23]. Łatwo jednak sprawdzić równoważność podanych tu definicji z definicjami używanymi w [23], czy [22].

Z twierdzeń Kuratowskiego–Ulama i Fubiniego (zob. [31]) wynika łatwo, że ideały $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ mają obie powyższe własności.

W pracy [22] J. Kraszewski badał dokładniej zastosowania własności produktowalności ideałów na przestrzeni 2^ω. Niektóre z udowodnionych tam twierdzeń dotyczących produktowalnych ideałów wymagały dodatkowego założenia, że ideał ma słabą własność Fubiniego. Nie wiadomo, czy założenie to jest istotne, w rozdziale tym pokażemy jednak, że nie wynika ono z samej produktowalności ideału. Pokażemy zatem przykład takiego ideału, w którym znajdują się wszystkie cylindry nad zbiorami z ideałów $\mathcal{I}_f$, ale jednocześnie jest w tym ideale cylinder, który nie jest tej postaci.

Warto zaznaczyć, że wszystkie naturalne przykłady ideałów produktowalnych, takie jak wspomniane wyżej ideały miary i kategorii, czy rozważany w [22] najmniejszy nietrywialny produktowalny σ-ideał $\mathbb{S}_2$ mają słabą własność Fubiniego. Nietrudno też pokazać, że słaba własność Fubiniego nie implikuje produktowalności, najprostszym przykładem jest tu ideał $[2^\omega]^{\leqslant\omega}$.

5.1 Konstrukcja ideału

Badając zagadnienie istnienia produktowalnego ideału bez słabej własności Fubiniego, J. Kraszewski sprowadził je do konstrukcji rodziny podzbiorów zbioru ω o pewnej kombinatorycznej własności (zob. [23], dowód twierdzenia 4.1).

Lemat 5.1.1 (Kraszewski). *Załóżmy, że istnieje rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, zawierająca zbiory $\emptyset$ oraz ω i taka, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \in [\mathrm{CIR}]^\omega$ mamy*

$$\exists A \in \mathcal{A}\ \forall \varphi \in \mathcal{F}\ \ \varphi^{-1}[A] \notin \mathcal{A}.$$

Wtedy istnieje produktowalny σ-ideał podzbiorów 2^ω bez słabej własności Fubiniego. □

W rozdziale tym wykażemy, że istnieje rodzina, o jakiej mowa w lemacie 5.1.1.

Odnotujmy, iż J. Kraszewski pokazał też, że z istnienia produktowalnego σ-ideału bez słabej własności Fubiniego można łatwo udowodnić istnienie rodziny, o jakiej mowa w powyższym lemacie. Konstrukcja rodziny o tych własnościach jest zatem istotnym i w jakimś sensie koniecznym krokiem w pokazaniu przykładu takiego ideału.

Potrzebny nam będzie w dowodzie topologiczny lemat dotyczący hiperprzestrzeni nad produktem przestrzeni zwartych. Dla pełności rozumowania, lemat ten, wraz z dowodem autorstwa P. Milewskiego, został umieszczony w pracy [23], choć należy on podobno do folkloru topologicznego.

Lemat 5.1.2. *Dla dowolnych zwartych przestrzeni polskich X, Y rodzina tych zbiorów doskonałych $P \subseteq X \times Y$, które są wykresami częściowych funkcji z*

X w Y jest rezidualna w przestrzeni $K(X \times Y)$ zwartych podzbiorów $X \times Y$ z topologią Vietorisa. $\square$

Poniższy fakt jest powszechnie znany i łatwy do udowodnienia.

Lemat 5.1.3. *Dla dowolnego zbioru $G \in \mathcal{M}^*$, zbiór $\{P \in Perf : P \subseteq G\}$ jest rezidualny w $K(2^\omega)$.* $\square$

Niech T będzie nieskończonym i zarazem ko-nieskończonym podzbiorem zbioru ω, a X – podzbiorem zbioru 2^T mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$. Przez $\mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ oznaczać będziemy σ-ideał podzbiorów przestrzeni 2^ω generowany przez zbiory postaci $[X] = X \times 2^{\omega \setminus T}$ (przy naturalnym utożsamieniu przestrzeni 2^ω z $2^T \times 2^{\omega\setminus T}$) dla wszystkim takich zbiorów T i X.

Lemat 5.1.4. *Dla każdego zbioru $G \in \mathcal{M}^*(2^\omega)$ i zbioru $W \in \mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ istnieje zbiór doskonały $P \subseteq G \setminus W$.*

Dowód. Weźmy dowolne zbiory $G \in \mathcal{M}^*$ oraz $W \in \mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$. Z definicji σ-ideału $\mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ otrzymujemy, że $W = \bigcup_{n\in\omega}[X_n]$, gdzie $X_n \in [2^{T_n}]^{<\mathfrak{c}}$ dla każdego $n \in \omega$. Skonstruujemy schemat Cantora $\langle P_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ złożony ze zbiorów doskonałych tak, by $P_\emptyset \subseteq G$ oraz $P_s \cap [X_{|s|}] = \emptyset$. Na koniec zdefiniujemy $P = \bigcap_n \bigcup_{|s|=n} P_s$; tak zdefiniowany zbiór P, jak łatwo sprawdzić, jest szukanym zbiorem doskonałym.

Korzystając z lematów 5.1.2 i 5.1.3 łatwo znajdujemy zbiór doskonały $Q \subseteq G$ taki, że dla dowolnego $n \in \omega$ (przy naturalnym utożsamieniu) $Q \subseteq 2^{T_n} \times 2^{\omega\setminus T_n}$ jest wykresem funkcji częściowej z 2^{T_n} w $2^{\omega\setminus T_n}$. Jak łatwo zauważyć, $|Q \cap [X_0]| < \mathfrak{c}$, możemy więc znaleźć doskonały zbiór $P_\emptyset \subseteq Q$ rozłączny z $[X_0]$.

Przypuśćmy, że zbiory P_s zostały już skonstruowane dla wszystkich $s \in 2^{<\omega}$ takich, że $|s| \leqslant n$. Dla każdego $s \in 2^{<\omega}$ takiego, że $|s| = n$, znajdujemy dwa rozłączne podzbiory doskonałe $Q_{s\frown 0}$, $Q_{s\frown 1}$ zbioru P_s. Ponieważ zbiór $Q_{s\frown i}$ (dla $i \in \{0,1\}$) jest podzbiorem zbioru Q, jest on również wykresem funkcji częściowej z $2^{T_{n+1}}$ w $2^{\omega\setminus T_{n+1}}$. Mamy zatem $|Q_{s\frown i} \cap [X_{n+1}]| < \mathfrak{c}$ dla $i \in \{0,1\}$, możemy więc wybrać zbiory doskonałe $P_{s\frown i} \subseteq Q_{s\frown i}$ (dla $i \in \{0,1\}$) rozłączne z $[X_{n+1}]$. □

Lemat 5.1.5. *Dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$, istnieje rodzina $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ złożona z podzbiorów ω, taka, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \in [\mathrm{CIR}]^\omega$ mamy*

$$\exists A \in \mathcal{A}' \ \forall f \in \mathcal{F} \ \ f^{-1}[A] \notin \mathcal{A}'.$$

Dowód. Niech $\kappa = |\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$. Ustalmy numerację $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ elementów rodziny $\mathcal{A}$ oraz numerację $\langle \mathcal{F}_\alpha : \kappa \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ przeliczalnych podrodzin CIR. Rodzinę $\mathcal{A}' = \langle A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ skonstruujemy indukcyjnie, konstruując zbiory A_α dla $\alpha \in [\kappa, \mathfrak{c})$ tak, aby spełnione były następujące warunki dla każdego $\alpha \in [\kappa, \mathfrak{c})$:

1. $f^{-1}[A_\alpha] \notin \{A_\xi : \xi < \alpha\}$ dla każdego $f \in \mathcal{F}_\alpha$,

2. $f^{-1}[A_\alpha] \neq A_\alpha$ dla każdego $f \in \mathcal{F}_\alpha$,

3. $A_\alpha \neq f^{-1}[A_\xi]$ dla każdych $\xi < \alpha$ i $f \in \mathcal{F}_\xi$.

Zauważmy, że warunki te gwarantują nam, iż dla dowolnego $\alpha \in [\kappa, \mathfrak{c})$

$$\forall f \in \mathcal{F}_\alpha \ \ f^{-1}[A_\alpha] \notin \mathcal{A}'.$$

Istotnie, warunek 1. gwarantuje nam, że zbiór $f^{-1}[A_\alpha]$ nie należy do części rodziny skonstruowanej dotychczas, warunek 2. – że zbioru tego nie dodajemy w kroku α, a warunek 3. – że nie dodamy go w następnych krokach konstrukcji.

Przypuśćmy, że określiliśmy już A_ξ dla każdego $\xi < \alpha$. W pierwszej kolejności pokażemy, że zbiór elementów $\mathcal{P}(\omega)$ spełniających warunek 2. jest rezidualny w 2^ω.

Zauważmy, że dla ustalonej funkcji $f \in \mathrm{CIR}$ warunek $A = f^{-1}[A]$ oznacza, że $\forall n \in \omega \ (n \in A \Leftrightarrow f(n) \in A)$. Dla dowolnego $n \in \omega$ określmy zbiór $\mathrm{orb}_f(n) = \{n, f(n), f(f(n)), \ldots\}$. Widzimy, że warunek $A = f^{-1}[A]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja charakterystyczna zbioru A jest stała na zbiorze $\mathrm{orb}_f(n)$, dla każdego $n \in \omega$.

Dla pewnego $n \in \omega$ zbiór $\mathrm{orb}_f(n)$ jest nieskończony. Istotnie, gdyby dla każdego $n \in \omega$ zbiór $\mathrm{orb}_f(n)$ był skończony, to mielibyśmy $\mathrm{rg}(f) = \omega$, co stoi w sprzeczności z faktem, że $f \in \mathrm{CIR}$. Ponieważ zbiór tych $A \subseteq \omega$, których funkcje charakterystyczne są stałe na ustalonym zbiorze nieskończonym, jest pierwszej kategorii, widzimy, że dla prawie każdego (w sensie kategorii) zbioru $A \in \mathcal{P}(\omega)$ mamy $A \neq f^{-1}[A]$. Przeliczalność rodziny $\mathcal{F}_\alpha$ implikuje zatem, że zbiór elementów spełniających warunek 2. jest rezidualny w 2^ω.

Niech zatem $G \in \mathcal{M}^*(2^\omega)$ będzie zbiorem tych $A \subseteq \omega$, które spełniają warunek 2.. Pokażemy teraz, że zbiór $W \subseteq 2^\omega$ złożony z tych $A \subseteq \omega$, które nie spełniają warunku 1., należy do ideału $\mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$. Istotnie, $f^{-1}[A] = A_\xi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap \mathrm{rg}(f) = f[A_\xi]$. Dla ustalonego $f \in \mathcal{F}_\alpha$ zbiór takich $A \subseteq \omega$, że $A \cap \mathrm{rg}(f) = f[A_\xi]$ możemy zapisać jako $\{f[A_\xi] : \xi < \alpha\} \times 2^{\omega \setminus \mathrm{rg}(f)}$, a zbiór tej postaci jest jednym z generatorów ideału $\mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$.

Z lematu 5.1.4 otrzymujemy zbiór doskonały $P \subseteq G \setminus W$. Istnieje zatem continuum elementów 2^ω spełniających jednocześnie warunki 1. i 2.. Ponieważ elementów 2^ω nie spełniających warunku 3. jest mniej niż $\mathfrak{c}$, możemy z łatwością znaleźć element $A_\alpha \subseteq \omega$ spełniający warunki 1.—3.. □

Twierdzenie 5.1.6. *Istnieje produktowalny σ-ideał podzbiorów przestrzeni 2^ω, który nie ma słabej własności Fubiniego.*

Dowód. Łatwo wynika z lematów 5.1.1 i 5.1.5. □

5.2 Miara i kategoria w hiperprzestrzeni

Dowód lematu 5.1.5 oparty był na – stanowiącym treść lematu 5.1.4 – związku ideału $\mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ z ideałem kategorii w 2^ω. Do udowodnienia tego związku posłużyliśmy się własnościami ideału kategorii w przestrzeni $K(2^\omega)$.

Ideał kategorii pełnił w dowodzie lematu 5.1.5 wyłącznie rolę pomocniczą. Interesującym pytaniem jest, czy w takiej pomocniczej roli można użyć ideału miary.

W dowodzie lematu 5.1.5 wykorzystaliśmy w pewnym momencie fakt, że dla ustalonej funkcji $f \in \mathrm{CIR}$, zbiór tych $A \in \mathcal{P}(\omega)$, że $f^{-1}[A] = A$, jest pierwszej kategorii. Stosując analogiczną metodę można również pokazać, że zbiór taki jest miary zero.

Nie jest jasne, czy jest prawdziwy jakikolwiek „miarowy” odpowiednik lematu 5.1.4. Sformułujmy zatem następujące pytania.

Problem 5.2.1. Czy dla dowolnych zbiorów $N \in \mathcal{N}^*(2^\omega)$ i $W \in \mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ mamy $N \nsubseteq W$? Innymi słowy, czy dla dowolnego $W \in \mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$, mamy $W \notin \mathcal{N}^*$?

Problem 5.2.2. Czy dla dowolnych zbiorów $N \in \mathcal{N}^*(2^\omega)$ i $W \in \mathcal{W}_{<\mathfrak{c}}$ istnieje zbiór doskonały $P \subseteq N \setminus W$?

Łatwo sprawdzić, że odpowiedź pozytywna na oba powyższe pytania wynika z założenia, że każdy zbiór mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ ma miarę zero. W szczególności pozytywna odpowiedź jest niesprzeczna z ZFC.

W dowodzie lematu 5.1.5 wykorzystywaliśmy ideał kategorii na przestrzeni $K(2^\omega)$ w celu „mierzenia" rodzin zbiorów doskonałych. Istotnym krokiem w dowodzie był lemat 5.1.3, który mówi, że jeżeli ustalimy zbiór rezidualny G w 2^ω, to prawie każdy (w sensie kategorii w $K(2^\omega)$) zbiór doskonały jest zawarty w G. Pokażemy, że „miarowy" odpowiednik tego twierdzenia nie jest prawdziwy.

Stwierdzenie 5.2.3. *Nie istnieje borelowska probabilistyczna miara μ na zbiorze $Perf(2^\omega)$, znikająca na punktach, o tej własności, że dla dowolnego zbioru $H \subseteq 2^\omega$ miary Lebesgue'a pełnej*

$$\{P \in Perf(2^\omega) : P \subseteq H\} \in \mathcal{N}_\mu^*.$$

Dowód. Skorzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.2.4 (Cichoń, [3], tw. 3.2.17). *Oznaczmy przez $R(\mathbf{V})$ zbiór liczb losowych nad $\mathbf{V}$. Wtedy*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \Vdash R(\mathbf{V}) \text{ nie zawiera zbioru doskonałego},$$

gdzie symbol $\mathbb{B}$ oznacza forcing Solovaya. □

Przypuśćmy, że istnieje miara μ, o jakiej mowa w stwierdzeniu. Wtedy algebra $\mathbb{B}' = Bor(Perf(2^\omega))/\mathcal{N}_\mu$ jest izomorficzna z algebrą $\mathbb{B} = Bor(2^\omega)/\mathcal{N}$.

Zbiór generic G dla $\mathbb{B}'$ jest kodowany w kanoniczny sposób przez jeden element przestrzeni $Perf(2^\omega)$, zwany liczbą losową. Niech $\dot{R} \in Perf(X)$ będzie $\mathbb{B}'$-nazwą na liczbę losową w $Perf(2^\omega)$, czyli nazwą na taki element przestrzeni $Perf(2^\omega)$, że dla dowolnego borelowskiego zbioru $N \subseteq Perf$ miary μ zero mamy

$$\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \Vdash \dot{R} \notin N.$$

Weźmy dowolny zbiór borelowski $H \subseteq 2^\omega$ miary Lebesgue'a pełnej. Z założenia, że $\{P \in Perf(2^\omega) : P \subseteq H\} \in \mathcal{N}^*_\mu$ wynika, iż

$$\mathbf{1}_{\mathbb{B}'} \Vdash \dot{R} \subseteq H.$$

Zatem element $\mathbf{1}_{\mathbb{B}'}$ forsuje, że $\dot{R}$ jest zbiorem doskonałym złożonym z liczb losowych nad $\mathbf{V}$, co prowadzi do sprzeczności z twierdzeniem 5.2.4. □

Odnotujmy też, że z lematu 5.1.3 łatwo wynika następujące znane stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.2.5 ([3], lemat 3.3.2). *Załóżmy, że* $M \models$ ZFC *a* $M[G]$ *jest jego rozszerzeniem generic. Jeżeli w* $M[G]$ *istnieje liczba Cohena nad* M*, to w* $M[G]$ *istnieje zbiór doskonały złożony z liczb Cohena nad* M*.*

Dowód. W modelu $M[G]$ istnieje liczba Cohena P w przestrzeni $K(2^\omega)$. Ponieważ $Perf \in \mathcal{M}^*(K(2^\omega))$, mamy $P \in Perf$. Z lematu 5.1.3 wynika też, że dla dowolnego $G \in \mathcal{M}^*$ kodowanego w M mamy $P \subseteq G$, zatem P jest zbiorem doskonałym złożonym z liczb Cohena nad M. □

Literatura

[1] Lista problemów otwartych z konferencji w Lądku Zdroju, czerwiec 2001. `http://www.im.pwr.wroc.pl/~cichon/infcomb/open2001.html`.

[2] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, J. Rzepecka, S. Wroński. Marczewski fields and ideals. *Real Analysis Exchange*, 26(2):703–715, 2000–2001.

[3] T. Bartoszyński, H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A K Peters, Ltd, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[4] T. Bartoszyński, S. Shelah. Strongly meager sets do not form an ideal. *J. Math. Log.*, 1(1):1–34, 2001.

[5] J. Brendle. Strolling through paradise. *Fundamenta Mathematicae*, 148(1):1–25, 1995.

[6] J. B. Brown. The Ramsey sets and related sigma algebras and ideals. *Fundamenta Mathematicae*, 136(3):179–185, 1990.

[7] J. B. Brown, H. Elalaoui-Talibi. Marczewski–Burstin like characterizations of σ-algebras, ideals, and measurable functions. *Coll. Math.*, 82(2):227–286, 1999.

[8] C. Burstin. Eigenschaften messbarer und nichtmessbarer Mengen. *Sitzungsber. Kaiserlichen Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Abteilung IIa*, 123:1525–1551, 1914.

[9] T. J. Carlson. Strong measure zero and strongly meager sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118(2):577–586, 1993.

[10] J. Cichoń, A. Jasiński. A note on algebraic sums of sets of reals. *Real Analysis Exchange*, 28(2):1–7, 2003.

[11] J. Cichoń, M. Morayne, R. Rałowski, Cz. Ryll-Nardzewski. On complex unions of subsets of the Cantor set. Preprint.

[12] K. Ciesielski, H. Fejzić, Ch. Freiling. Measure zero sets with nonmeasurable sum. *Real Analysis Exchange*, 27(2):783–793, 2001-2002.

[13] K. Ciesielski, J. Pawlikowski. *Covering Property Axiom CPA*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge Univ. Press. W druku.

[14] F. Dorais, R. Filipów. On Marczewski measurable additive functions and algebraic sums of Marczewski measurable sets. 2003. Preprint.

[15] P. Erdős, K. Kunen, R. Mauldin. Some additive properties of sets of real numbers. *Fundamenta Mathematicae*, 113(3):187–199, 1981.

[16] P. Erdős, A. H. Stone. On the sum of two Borel sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 25:304–306, 1970.

[17] F. Galvin, J. Mycielski, R. Solovay. Strong measure zero sets. *Notices of the American Mathematical Society*, strony A–280, 1973.

[18] T. Jech. *Set Theory*. Academic Press, 1978.

[19] A. S. Kechris. On a notion of smallness for subsets of the Baire space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 229:191–207, 1977.

[20] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, wolumen 156 serii *Graduate Texts in Mathematics*. Springer - Verlag, 1994.

[21] A. Kharazishvili. Some remarks on additive properties of invariant σ-ideals on the real line. *Real Analysis Exchange*, 21(2):715–724, 1995–1996.

[22] J. Kraszewski. Properties of ideals on generalized Cantor spaces. *Journal of Symbolic Logic*, 66(3):1303–1320, 2001.

[23] J. Kraszewski, M. Kysiak. Productivity versus Weak Fubini Property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2003. Praca złożona.

[24] K. Kunen. *Set Theory, an Introduction to Independence Proofs*, wolumen 102 serii *Studies in Logic*. North Holland, 1980.

[25] M. Kysiak. O dualności Erdősa – Sierpińskiego dla miary Lebesgue'a i kategorii Baire'a. Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, 2000.

[26] M. Kysiak. Nonmeasurable algebraic sums of sets of reals. *Fundamenta Mathematicae*, 2003. Praca złożona.

[27] M. Kysiak, T. Weiss. Small subsets of the reals and tree forcing notions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(1):251–259, 2004.

[28] A. Nowik, T. Weiss. On the Ramseyan properties of some special subsets of 2^ω and their algebraic sums. *The Journal of Symbolic Logic*, 67(2):547–556, 2002.

[29] A. Nowik, T. Weiss. Strongly meager sets and tree forcing notions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(4):1183–1187, 2002.

[30] A. Nowik, T. Weiss. Some remarks on totally imperfect sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(1):231–237, 2004.

[31] J. C. Oxtoby. *Measure and Category*, wolumen 2 serii *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York - Berlin, 1980.

[32] J. Pawlikowski. Every Sierpiński set is strongly meager. *Arch. Math. Logic*, 35(5-6):281–285, 1996.

[33] Ireneusz Recław. Some additive properties of special sets of reals. *Colloquium Mathematicum*, 62(2):221–226, 1991.

[34] C. A. Rogers. A linear Borel set whose difference set is not a Borel set. *Bull. London Math. Soc.*, 2:41–42, 1970.

[35] W. Sierpiński. Sur la question de la measurabilité de la base de M. Hamel. *Fundamenta Mathematicae*, 1:105–111, 1920.