

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, zestaw 9.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$.

- (a) Rozstrzygnąć, czy momentami zatrzymania muszą być $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$, $\tau + 1$, 2τ .
- (b) Załóżmy, że $\tau \geq 1$ p.n. Czy $\tau - 1$ musi być momentem zatrzymania?
- (c) Załóżmy, że τ jest parzyste p.n. Czy $\tau/2$ musi być momentem zatrzymania?

Zadanie 2. Załóżmy, że σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Wykazać, że każde ze zdarzeń $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ należy zarówno do $\mathcal{F}_\sigma$, jak i $\mathcal{F}_\tau$.

Zadanie 3. Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Rozpatrzmy moment zatrzymania

$$\tau = \inf\{n \geq 2 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} \wedge 5.$$

Wykazać, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

Zadanie 4. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji i średniej 0. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że S_n oraz $M_n = S_n^2 - \text{Var } S_n$ są martyngalami względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_0, X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0. Wykazać, że ciąg $(Z_n)_{n \geq 0}$ dany jako

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n \quad \text{dla } n \geq 1$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n \geq 0}$.

Zadanie 6. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ o średniej 1. Wykazać, że $M_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)_{n \geq 1}$.

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ i niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że $S_n^3 - 3nS_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$.