

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 14.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n \geq 0}$ na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$ o następującej macierzy przejścia:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Załóżmy, że $X_0 = 1$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n dojdzie do stanu 2 zanim dojdzie do stanu 4.
- (b) Załóżmy, że $X_0 = 3$. Obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.
- (c) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha.

Zadanie 2. Rzucamy kostką aż do momentu, dopóki nie wyrzucimy trzech piątek pod rząd.

- (a) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
- (b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych oczek.

Zadanie 3. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geq 0}$ jest łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, \dots, m\}$, którego macierz przejścia $P = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ jest podwójnie stochastyczna, tzn. dla każdego $j \in E$ zachodzi $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$. Wykazać, że $\pi_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, \dots, m$, jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.

Zadanie 4. W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych od 1 do 6, a pudełko B jest początkowo puste. Rzucamy kostką i po każdym rzucie przenosimy kulę o numerze równym wynikowi rzutu do drugiego pudełka. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że dla dużego n pudełko B będzie puste.

Zadanie 5. Po wierzchołkach kwadratu $ABCD$ porusza się pionek, w każdym ruchu przeskakując do losowo wybranego sąsiada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W chwili początkowej pionek znajduje się w wierzchołku A . Obliczyć średni czas potrzebny, aby odwiedzić wszystkie wierzchołki kwadratu.