

Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2025/2026

zadania na ćwiczenia, zestaw 12.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ o jednakowym rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$. Rozstrzygnąć, które z poniższych procesów są jednorodnymi łańcuchami Markowa, a dla tych, które nimi są, podać macierz przejścia łańcucha.

(a) $X_0 = 0, X_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n, n \geq 1,$

(b) $Y_0 = 1, Y_n = \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n, n \geq 1,$

(c) $Z_n = 2^{\varepsilon_n}, n \geq 1,$

(d) $W_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}, n \geq 1,$

(e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}, n \geq 1.$

Zadanie 2. Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ – funkcją mierzalną (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), Y_0 – zmienną o wartościach w E , zaś $X_0, X_1, \dots$ – ciągiem niezależnych zmiennych o tym samym rozkładzie, niezależnym od Y_0 . Definiujemy dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$Y_{n+1} = f(X_n, Y_n).$$

Wykazać, że $(Y_n)_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i wyznaczyć jego macierz przejścia.

Zadanie 3. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o wartościach w E . Wykazać, że dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f : E \rightarrow E$ ciąg $(f(X_n))_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Podać przykład, że nie musi tak być, jeśli funkcja f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 4. Rozpatrzmy jednorodny łańcuch Markowa $(X_n)_{n \geq 0}$ na przestrzeni stanów E o macierzy przejścia $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Funkcję $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy *harmoniczną*, jeżeli dla każdego $x \in E$ mamy

$$f(x) = \sum_{y \in E} p_{xy} f(y).$$

Wykazać, że jeżeli f jest funkcją harmoniczną, to ciąg $(f(X_n))_{n \geq 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Zadanie 5. Rozważmy asymetryczne błądzenie losowe na prostej, $X_0 = 0$, $X_n = U_1 + \dots + U_n$ dla $n \geq 1$, gdzie $U_1, U_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$. Wykazać, że następujące procesy są łańcuchami Markowa i wyznaczyć ich macierze przejścia:

(a) $Y_n = |X_n|$,

(b) $Z_n = \max_{k \leq n} X_k - X_n$.

Zadanie 6. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geq 0}$, $(Y_n)_{n \geq 0}$ są niezależnymi łańcuchami Markowa o tej samej macierzy przejść $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Wykazać, że ciąg $Z_n = (X_n, Y_n)$ jest łańcuchem Markowa o macierzy przejścia $Q = (q_{ij,hk})_{i,j,h,k \in E}$, gdzie $q_{ij,hk} = p_{ih}p_{jk}$.