

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **16 XI 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Załóżmy, że ciąg funkcji charakterystycznych $\varphi_{X_n}(t)$ zmiennych losowych X_n spełnia dla każdego $t \in \mathbb{R}$ warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{-3t^2} \left(\frac{1}{3} e^{2it} + \frac{2}{3} e^{-it} \right).$$

Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \geq 0)$.

Zadanie 2. Załóżmy, że X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i funkcji charakterystycznej φ . Wykazać, że jeśli φ jest różniczkowalna w zerze i $\varphi'(0) = ia$, to

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej o rozkładzie μ . Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (a) $\varphi(s) = 1$ dla pewnego $s \neq 0$,
- (b) φ jest funkcją s -okresową,
- (c) rozkład μ jest skupiony na zbiorze punktów postaci $\frac{2\pi k}{s}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.