Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **26 X 2023** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1.

(a) Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, to $\mathbb{E}|X| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|$.

(b) Załóżmy, że zmienne X_n są jednostajnie całkowalne oraz $X_n \Rightarrow X$. Wykazać, że wówczas X jest całkowalna oraz $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

(c) Wykazać, że jeśli p jest dodatnią liczbą całkowtą i mamy $X_n \Rightarrow X$ oraz $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, to wówczas $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ oraz $\mathbb{E}X_n^p \to \mathbb{E}X^p$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ oznacza rozkład normalny o średniej a i wariancji σ^2.

(a) Wykazać, że jeśli ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geqslant 1}$ oraz liczb dodatnich $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne, to ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest zbieżny.

(b) Wykazać, że ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geqslant 1}$ oraz liczb dodatnich $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ są ograniczone.

(c) Wykazać, że ciąg rozkładów $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest zbieżny do $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnego $K > 0$ i $y < 1$ istnieje takie $\alpha = \alpha(K, y) > 0$, że jeśli $\mathbb{E}X^2 = 1$ oraz $\mathbb{E}X^4 \leqslant K$, to $\mathbb{P}(|X| > y) \geqslant \alpha$. *Wskazówka:* użyć ciasności oraz zadania 1.