Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 30 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

(a) Rozstrzygnąć, czy momentami zatrzymania muszą być $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$, $\tau + 1$, 2τ.

(b) Załóżmy, że $\tau \geqslant 1$ p.n. Czy $\tau - 1$ musi być momentem zatrzymania?

(c) Załóżmy, że τ jest parzyste p.n. Czy $\tau/2$ musi być momentem zatrzymania?

Zadanie 2. Załóżmy, że σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykazać, że każde ze zdarzeń $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ należy zarówno do $\mathcal{F}_\sigma$, jak i $\mathcal{F}_\tau$.

Zadanie 3. Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Rozpatrzmy moment zatrzymania

$$\tau = \inf\{n \geqslant 2 \,|\, X_{n-1} = 1, X_n = 1\} \wedge 5.$$

Wykazać, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

Zadanie 4. Załóżmy, że rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ i niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1 \,|\, X_1 + \ldots + X_n = 1\}$. Wykazać, że $\mathbb{E}\tau = +\infty$.

Zadanie 6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji i średniej 0. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że S_n oraz $S_n^2 - \operatorname{Var} S_n$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że $S_n^3 - 3nS_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$.