

Rachunek prawdopodobieństwa II  
semestr zimowy 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 23 XI 2023

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładając, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny, oszacować prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

**Zadanie 2.**

(a) Niech  $X_n$  będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem  $n$ . Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

przy  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

**Zadanie 3.** Załóżmy, że zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym  $\mathbb{E}X_i = 0$ ,  $\text{Var}X_i = 1$ . Wykazać, że

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{X_1^2 + \dots + X_n^2} &\Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \\ \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} &\Rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Załóżmy, że zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym  $\mathbb{P}(X_i = a) = \mathbb{P}\left(X_i = \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$ , gdzie  $a > 1$ . Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu  $Z_n = (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$ .

**Zadanie 5.** Załóżmy, że  $X$  jest zmienną losową taką, że  $\text{Var}X = \sigma^2 < \infty$ , oraz posiadającą następującą własność: jeśli  $Y, Z$  są niezależnymi kopiami  $X$ , to  $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ . Wykazać, że wówczas  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

**Zadanie 6.** Załóżmy, że zmienne  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na  $[-1, 1]$ . Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2^3 + \dots + X_n^{2n-1}}{\sqrt{\ln n}}.$$

**Zadanie 7.** Załóżmy, że  $X_n$  ma rozkład Poissona z parametrem  $5n$ . Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $\alpha$ , dla których ciąg zmiennych losowych  $n^\alpha(X_n - 5n)$  jest ciasny.