Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 16 XI 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, a zmienna Rademachera ε jest niezależna od G. Wykazać, że każda ze zmiennych $X = G$, $Y = \varepsilon G$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ i są one nieskorelowane, ale nie są niezależne (w szczególności nie mają zatem łącznego rozkładu normalnego).

Zadanie 2. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie, przy czym $X_i \geqslant 0$, $\mathbb{E}X_i = 1$, $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że

$$2\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $|X_i| \leqslant K$ oraz $\sum_{n \geqslant 1} \operatorname{Var} X_n = +\infty$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = 1$ oraz $\mathbb{E}|X_i|^{2+\delta} \leqslant C$ dla pewnych $C, \delta > 0$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, i przyjmijmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $s_n = \sqrt{\operatorname{Var} S_n}$. Wykazać, że jeśli dla pewnego $\delta > 0$ spełniony jest tzw. *warunek Lapunowa*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i - \mathbb{E}X_i\right|^{2+\delta} = 0,$$

to wówczas

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Zadanie 6. Załóżmy, że zmienne $X_2, X_3, \ldots$ są niezależne i mają następujący rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2},$$
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{2n^2}.$$

Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var} S_n}{n} = 2$, ale $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (w szczególności nie może być zatem spełniony warunek Lindeberga).