Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 26 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną. Czy musi stąd wynikać, że funkcjami charakterystycznymi są: φ^2, $\operatorname{Re}\varphi$, $|\varphi|^2$, $|\varphi|$?

Zadanie 2. Załóżmy, że zmienne losowe X_n mają rozkład Poissona z parametrem λ_n, gdzie $\lambda_n \to \lambda > 0$. Wykazać, że $X_n \Rightarrow X$, gdzie X ma rozkład Poissona z parametrem λ.

Zadanie 3. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X_0$ oraz $Y_n \Rightarrow Y_0$, gdzie zmienne X_n i Y_n są niezależne dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wykazać, że wówczas $X_n + Y_n \Rightarrow X_0 + Y_0$. Podać przykład, że założenie niezależności jest potrzebne.

Zadanie 4. Niech X_n będzie zmienną losową o rozkładzie zadanym jako

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wykazać, że nie istnieje zmienna losowa X taka, że $X_n \Rightarrow X$.

Zadanie 5. Załóżmy, że ε_n są niezależnymi zmiennymi Rademachera:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Wykazać, że $U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

Zadanie 6. Załóżmy, że zmienne X_n są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym $\varphi_{X_n}(t) = e^{-|t|^\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $n^{-\frac{1}{\alpha}}(X_1 + \ldots + X_n)$.

Zadanie 7. Załóżmy, że zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0, 1)$. Wykazać, że jeśli a_n jest ciągiem liczb dodatnich takim, że $a_n \to 0$ oraz $\frac{p_n}{a_n} \to \lambda > 0$, to zmienne $a_n X_n$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

Zadanie 8. Załóżmy, że $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym ε_k mają rozkład Rademachera, a X_k mają rozkład jednostajny na odcinku $[1, 2]$. Zbadać ciasność ciągu zmiennych losowych $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \varepsilon_k X_k$.